اجابات الفصل الأول
الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الاولى / حساب التفاضل

تمارين (١-١) صفحة ٨

السؤال الأول: أ) مقدار التغير في ق(س) = ق(٥) − ق(٣) = $\frac{٧٨}{٥}$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ الى ١ يساوي = $\frac{\text{ق}(١)-\text{ق}(٤)}{١-٤} = \frac{٥١}{١٢} = \frac{١٧}{٤}$

السؤال الثاني: متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\frac{\pi}{٢}، \pi]$ = $\frac{\text{ق}(\pi)-\text{ق}(\frac{\pi}{٢})}{\pi-\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

السؤال الثالث: متوسط التغير = $\frac{\text{ق}(\text{أ})-\text{ق}(١)}{\text{أ}-١} = \frac{\text{أ}^٢+\text{أ}^٢-(٦-١)}{\text{أ}-١} = \frac{٢\text{أ}^٢-٥}{\text{أ}-١} = ٩$

ومنها $٢\text{أ}^٢ - ٥ = ٩\text{أ} - ٩$ وبالتالي $٢\text{أ}^٢ - ٩\text{أ} + ٤ = ٠ = (٢\text{أ}-١)(\text{أ}-٤)$

$\text{أ} = \frac{١}{٢}$ (مرفوض لأن أ > ٢) ، $\text{أ} = ٤$ ومنها $\text{أ} = ٤$

السؤال الرابع : متوسط التغير للاقتران ك (س) في الفترة [١، ٣]

$= \frac{\text{ك}(٣)-\text{ك}(١)}{٢} = \frac{٩+٣\text{ق}(٣)-(١+٣\text{ق}(١))}{٢} = \frac{٨+٣(\text{ق}(٣)-\text{ق}(١))}{٢} = ٤ + ٣\,\frac{\text{ق}(٣)-\text{ق}(١)}{٢}$ =

$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$

السؤال الخامس: ميل المستقيم ل = ظا١٣٥ = $\frac{\text{ق}(٣)-\text{ق}(١)}{٢} = -١$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = $\frac{\text{هـ}(٣)-\text{هـ}(١)}{٢}$

$= \frac{٣\text{ق}(٣)+٩-١-(٣\text{ق}(١)+١-١)}{٢} = \frac{٨}{٢} + ٣\,\frac{\text{ق}(٣)-\text{ق}(١)}{٢} = ٤ + ٣ \times -١ = ١$

السؤال السادس: السرعة المتوسطة في الفتر ة [١، ٣]

$= \frac{\text{ف}(٣)-\text{ف}(١)}{٣-١} = \frac{٩+٣\text{ب}-(١+\text{ب})}{٣-١} = ٦$

ومنها ٢ب + ٨=١٢ وبالتالي ب=٢

السؤال السابع: متوسط التغير للاقتران ق (س)

$$= \frac{ق(ن) - ق(٢)}{ن - ٢} = \frac{أ ن^{٢} + ب ن + جـ - (٤أ + ٢ب + جـ)}{ن - ٢}$$

$$= \frac{أ(ن^{٢} - ٤) + ب(ن - ٢)}{ن - ٢} = \frac{ن - ٢}{ن - ٢} \times (أ(ن + ٢) + ب) = (أ(ن + ٢) + ب)$$

السؤال الثامن :أ) متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

$$= \frac{ق(١) - ق(٠)}{١ - ٠} = ق(١) - ق(٠)$$

$$= ١ + هـ^{١+١} - (٠ + هـ^{٠+١}) = ١ + هـ^{٢} - هـ$$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى هـ

$$= \frac{ق(هـ) - ق(١)}{هـ - ١} = \frac{(هـ^{ن} + لو_{هـ} هـ) - (١ + لو_{هـ} ١^{ن})}{هـ - ١} \qquad \frac{٣ - هـ}{١ - هـ} = \frac{هـ + ن - ١}{هـ - ١}$$

ومنها ن - ١ = -٣ وبالتالي ن =-٢

تمارين (١-٢) صفحة ١٧

السؤال الأول :

أ) $ق'(س) = ٥س^{٤} - ٢س$ ومنها $ق'(-١) = ٥ + ٢ = ٧$

ب) $ق'(س) = (س^{٣} - ١) \times ١ + ٣س^{٢}(١٢ + س)$

ومنها $ق'(٣) = ٢٦ + ٢٧(١٢ + ٣) = ٤٣١$

ج) $ق'(س) = \frac{(٥ - س^{٢}) \times ٢س - -٢س \times س^{٢}}{(٥ - س^{٢})^{٢}}$ ومنها $ق'(-٢) = -٢٠$

السؤال الثاني : أ) $(\text{ق}+\text{هـ}^{٢})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$

$= \text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{هـ}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}'(١) + ٢\text{هـ}'(١) \times \text{هـ}(١)$

$= ٣ + ٢ \times -٣ \times -١ = ٩$

ب) $\left(\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - \frac{٣}{\text{هـ}(\text{س})}\right)'(١) = \left(\text{س}^{٢}\,\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \frac{٣\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}\right)(١)$

$= \left(\text{ق}'(١) + ٢\text{ق}(١) + \frac{٣\text{هـ}'(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}\right) = ٣ + ٤ + -٩ = -٢$

السؤال الثالث: $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{\text{ق}'(١)\text{هـ}(١) - \text{هـ}'(١) \times \text{ق}(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}$

نجد $\text{ق}'(١)$ **من اشتقاق** $\text{ق}(\text{س})$ **حيث** $\text{ق}'(١) = ٠$ ، $\text{ق}(١) = \frac{١}{٢}$

ميل المماس = ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$= \text{ظا}\ ١٥٠ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ومنها $\text{هـ}'(١) = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{هـ}(١) = ١$

بالتعويض ينتج أن: $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

السؤال الرابع: أ) $\text{ص}' = \frac{\text{س}+١-\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ، $\text{ص}'' = \frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}}$

الطرف الأيمن = $٢ \times \frac{\text{س}}{(\text{س}+١)} \times \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} + \text{س} \times \frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}} = ٠$ **= الطرف الأيسر**

ب) $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{٥} + ٥\text{س}^{-٤}$ ، $\text{ص}' = ٥\text{أ}\,\text{س}^{٤} - ٢٠\text{س}^{-٥}$

$\text{ص}'' = ٢٠\text{أ}\,\text{س}^{٣} + ١٠٠\text{س}^{-٦} = ٢٠\text{أ}\,\text{س}^{٣} + \frac{١٠٠}{\text{س}^{٦}} = ٢٠(\text{أ}\,\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{-٦})$

ومنها $\text{ص}'' = \frac{٢٠}{\text{س}^{٢}}(\text{أ}\,\text{س}^{٥} + \frac{٥}{\text{س}^{٤}}) = \frac{٢٠\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

السؤال الخامس : بعد التبسيط $ق(س) = (١ - س^{١٦})$ ومنها $ق'(س) = -١٦ س^{١٥}$

$ق'(١) = -١٦$

السؤال السادس : أولا: $ق(س) = س^{٢}$ ومنها $ق'(س) = ٢س$

أ) $ق'(٠) = ٠$

ب) $هـ'(٠)$ غير موجودة لأن هـ(س) غير متصل عندها

جـ) $$(ق \times هـ)(س) = \begin{cases} ٠ ، & س \in [٠ ، \frac{١}{٢}) \\ -س^{٢} ، & س \in (-\frac{١}{٢} ، ٠) \end{cases}$$

لاحظ ان الاقتران الجديد متصل عندما س = ٠

د) **لاحظ أنه لا يمكن تحديد وجود $(ق \times هـ)'(٠)$ باستخدام مشتقة حاصل الضرب**

$$(ق \times هـ)'(س) = \begin{cases} ٠ ، & س \in (٠ ، \frac{١}{٢}) \\ -٢س ، & س \in (-\frac{١}{٢} ، ٠) \end{cases} \quad \text{ومنها} \quad (ق \times هـ)'(٠) = ٠$$

ثانيا : نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

السؤال السابع : $ق(س) = س^{٤} + أس^{٣} - ٣$ ، $ق'(س) = ٤س^{٣} + ٣أ س^{٢}$

$ق''(س) = ١٢س^{٢} + ٦أ س$ ، $ق^{(٣)}(س) = ٢٤س + ٦أ$ ،

$ق^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ٦أ = ١٨$ ومنها $أ = -٥$

السؤال الثامن : $ق(س) = س^{ن}$ ، $ق'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣} = أس$ ومنها $ن - ٣ = ١$ ، $ن = ٤$ ،

لكن $ن(ن-١)(ن-٢) = أ$ ومنها $أ = ٢٤$

تمارين (١-٣) صفحة ٢١

السؤال الأول :

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٢جاس} - \text{٢ قا}^{٢}\text{س}$

ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{١+قاس})(\text{-قاس ظاس}) - (\text{١-قاس})(\text{قاس ظاس})}{(\text{١+قاس})^{٢}} = \frac{-\text{٢قاس ظاس}}{(\text{١+قاس})^{٢}}$

ج) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قتاس+ظتاس} + \text{س قتاس ظتاس} + \text{س قتا}^{٢}\text{س}}{(\text{قتاس+ظتاس})^{٢}} = \frac{\text{١+س قتاس}}{\text{قتاس+ظتاس}}$

د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س قاس} + \text{س}^{٢}\text{ قاس ظاس} = \text{س قاس}(\text{٢+س ظاس})$

السؤال الثاني : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} = \text{١} + \text{ظا}^{٢}\text{س}$ **(يتم التعامل مع مشتقة ظا^{٢}س على أنها حاصل ضرب)**

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{٢قا}^{٢}\text{س ظاس} = \text{٢ظاس}(\text{١}+\text{ظا}^{٢}\text{س}) = \text{٢ص}(\text{١}+\text{ص}^{٢})$

السؤال الثالث : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{-\text{س}^{٢}\text{جاس} - \text{٢س جتاس} + \text{٢جاس}}{\text{س}^{٣}}$

الآن الطرف الأيمن= $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{٢}}{\text{س}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}$

$= \frac{-\text{س}^{٢}\text{جاس} - \text{٢س جتاس} + \text{٢جاس}}{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{٢}}{\text{س}} \times \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \text{٠}$ **(مع التبسيط والاختصار)**

السؤال الرابع : $\text{ن}'(\text{س}) = \text{س} + \text{جاس}$ ، $\text{ن}''(\text{س}) = \text{١} + \text{جتاس} = \text{٠}$

ومنها $\text{جتاس} = -\text{١}$، $\text{س} = \pi$ ، $\text{س} = -\pi$

تمارين (١-٤) صفحة ٢٩

السؤال الأول :

ا) ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي قيمة النهاية = $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{س-١}-١}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^{٠}-١}{١} = ٠$

ب) ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي قيمة النهاية= $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٤}{قا^{٢}س} = ٤$

ج) ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي قيمة النهاية = $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١-جتاس}{٣س^{٢}}$ وناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى فتصبح $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{جاس}{٦س}$ وناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ تطبق قاعدة لوبيتال مرة أخرى فتصبح $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{جتاس}{٦} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{س-جاس}{س^{٣}} = \frac{١}{٦}$

السؤال الثاني :

أ) $\frac{دص}{دس} = -جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

ب) $ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$ ومنها $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢س}$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ} س^{-٥} = \frac{-٥}{٢} لو_{هـ} س$ ومنها $\frac{دص}{دس} = \frac{-٥}{٢س}$

د) $ص = (هـ^{س}-٢)(هـ^{س}+٢)$

$\frac{دص}{دس} = (هـ^{س})(هـ^{س}+٢) + (هـ^{س}-٢)(هـ^{س})$ ، ومنها $\frac{دص}{دس} = ٢هـ^{٢س}$

السؤال الثالث : أ) $\underset{هـ\to٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٣+٥هـ)-ق(٣)}{١٠هـ} = \frac{٥}{١٠} ق'(٣) = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$ (بفرض و=٥ هـ)

ب) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-١}{ق(١)-ق(س)} = \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{س^{٢}-١}{س-١}}{\frac{ق(١)-ق(س)}{س-١}}$ بقسمة البسط والمقام على (س-١)

$$= -\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}+1}{\dfrac{\text{د(س)}-\text{د(1)}}{\text{س}-1}} = \frac{-2}{\text{د}'(1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

السؤال الرابع : $\text{ص}' = 2\text{س} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص} = \text{س}^2 + \text{هـ}^{\text{س}} + 1$ ومنها $\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = 0$

وبحل المعادلة ينتج أن: س = ١

السؤال الخامس :بما أن ناتج التعويض = $\frac{0}{0}$ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{\text{س}\to \text{أ}}\frac{\text{س}^{\text{ن}}-\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}}-\text{أ}^{\text{م}}} = \lim_{\text{س}\to \text{أ}}\frac{\text{ن س}^{\text{ن}-1}}{\text{م س}^{\text{م}-1}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\frac{\text{أ}^{\text{ن}-1}}{\text{أ}^{\text{م}-1}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$

السؤال السادس : لاحظ أن ناتج التعويض = $\frac{0}{0}$

قيمة النهاية = $\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{د}(1)-\text{د}'(\text{س})}{1} = \text{د}(1)-\text{د}'(1) = 6-3 = 3$

السؤال السابع : نفرض ٢س = ع ومنها $\text{س} = \frac{\text{ع}}{2}$ **عندما** س ← ١ **فإن** ع ← ٢

النهاية = $\lim_{\text{ع}\to 2}\frac{\text{د}'(\text{ع})-\text{د}'(2)}{\frac{\text{ع}}{2}-1} = 2\lim_{\text{ع}\to 2}\frac{\text{د}'(\text{ع})-\text{د}'(2)}{\text{ع}-2} = 2\text{د}''(2) = 2\times 5 = 10$

تمارين (١-٥) صفحة ٣٦

السؤال الأول: ميل المستقيم = $\frac{-1}{2}$ ، ميل المماس = ٢ لأنه عمودي عليه .

ميل المنحنى = ميل المماس ومنها $2\text{س} - 2 = 2$ ، $\text{س} = 2$

نقطة التماس = (٢،١)

السؤال الثاني : $\text{د}'(\text{س}) = -2\,\text{ظاس قا}^2\text{س}$

ميل المماس= $\text{د}'(\frac{\pi}{4}) = -2\,\text{ظا}\frac{\pi}{4}\,\text{قا}^2\frac{\pi}{4} = -4$

$\text{د}(\frac{\pi}{4}) = 3 - \text{ظا}^2\frac{\pi}{4} = 3 - 1 = 2$ **ومنها نقطة التماس** $(\frac{\pi}{4}، 2)$

معادلة المماس $\text{ص} - 2 = -4(\text{س} - \frac{\pi}{4})$ **ومنها** $\text{ص} = -4\text{س} + \pi + 2$

السؤال الثالث : $ن'(س) = \frac{١}{س}$ ميل المماس $= ن'(٢) = \frac{١}{٢}$ ، $ن(٢) = ٠$

معادلة المماس هي $ص - ٠ = \frac{١}{٢}(س - ٢)$ ومنها $ص = \frac{١}{٢}س - ١$

المماس يقطع محور السينات في النقطة ب $(٢،٠)$ والصادات في النقطة جـ $(٠، -١)$

مساحة المثلث م ب ج $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مساحة

السؤال الرابع : ميل المماس $= \frac{١-}{٦}$ ، $ن'(س) = \frac{٦-}{(س-٢)^٢}$

ميل المماس $= ن'(س) = \frac{١-}{٦} = \frac{٦-}{(س-٢)^٢}$

وبحل المعادلة ينتج أن: س $=٨$ أو س $= -٤$

عندما س$=٨$ ، ص $= ٤$ ، ا $= ٣٢$ ، وعندما س$=-٤$ ، ص$=٢$ ، ا $= ٨$

السؤال الخامس : أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر أي أن: $٤٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها $ن=٤$

ف$(٤) = ٨٠$م

المسافة الكلية المقطوعة $= ١٠٠ = ٢ \times ٨٠ -$ ف$(ن)$

ف$(ن) = ٦٠$ ، أي يكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م وهو نازل

$٤٠ن - ٥ن^٢ = ٦٠$، ومنها $ن = ٢،٦$ ، $ن = ٢$ تهمل

سرعة الجسم في اللحظة المطلوبة $= ٤٠ - ١٠ \times ٦ = -٢٠$م / ث

السؤال السادس : ف$(ن) = ٣٠ن - ٥ن^٢$

أ) أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر

ع$(ن) = ٣٠ - ١٠ن = ٠$، ومنها $ن = ٣$ ث

أقصى ارتفاع = ف$(٣) = ٤٥$م

ب) عندما يكون الجسم على مستوى سطح العمارة تكون الإزاحة $= -٤٠$م

$٣٠ن - ٥ن^٢ = -٤٠$ ومنها ن$=٢$-، $ن = ٤$ ث ، ن$=٢$- تهمل

السرعة في تلك اللحظة(ن$=٤$) $= -١٠$ م / ث

تمارين (١-٦)صفحة ٤١

السؤال الأول :

أ) $\frac{ءص}{ءس} = -٣(س^٢ + س + ١)^{-٤} \times (٢س + ١)$

عندما س$=١$: $\frac{ءص}{ءس} = -٣(٣)^{-٤} \times (٢ + ١) = \frac{١-}{٩}$

ب) $ص = س^٢ قا\frac{\pi}{س}$ ومنها $\frac{ءص}{ءس} = س^٢ قا\frac{\pi}{س} ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^٢} + ٢س قا\frac{\pi}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ءص}{ءس} = -٢$

جـ) ص = ٥ع^{٢} − ٧، $\frac{ءص}{ءع} = ١٠ع$

ع = $\frac{١}{س^{٢}+١}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ١٠ \times \frac{١}{س^{٢}+١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

عندما س=١ : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥}{٢}$

د) $\frac{ءص}{ءس} =$ قا^{٢} $\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} - ٢$جتا$\pi$س$\times$جا$\pi$س$\times \pi$

عندما س=١ : $\frac{ءص}{ءس} = -\pi$

هـ) $\frac{ءص}{ءس} = ٣($لـو$_{هـ}$ س$)^{٢} \times \frac{١}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

السؤال الثاني : $ن^{\prime}(س) = \frac{\frac{٢س م^{\prime}(س)}{م(س)} - ٢\text{لـو}_{هـ} م(س)}{٤س^{٢}}$

$ن^{\prime}(١) = \frac{\frac{٢م^{\prime}(١)}{م(١)} - ٢\text{لـو}_{هـ} م(١)}{٤} = \frac{١}{هـ} - ١$

السؤال الثالث : أ) $ن^{\prime}(س) = (٢س+١)هـ^{س^{٢}+س}$

ب) $ع^{\prime}(س) = \frac{٣س^{٢}-٦س}{س^{٣}-٣س^{٢}}$

السؤال الرابع : $ن^{\prime}(س) = ٢س^{٣} م^{\prime}(س^{٢}+١) + ٢س م(س^{٢}+١)$

$ن^{\prime\prime}(س) = ٤س^{٤} م^{\prime\prime}(س^{٢}+١) + ٤س^{٢} م^{\prime}(س^{٢}+١) + ٦س^{٢} م^{\prime}(س^{٢}+١) + ٢م(س^{٢}+١)$

$ن^{\prime\prime}(١) = ٤$

السؤال الخامس : $\frac{ءص}{ءس} = ٣ ن^{٢}(س) ن'(س) - ٣ س^{٢} ن^{٢}$ ن'(س ^{٣})

عندما س= ٢ : $\frac{ءص}{ءس} = -٣٠$

السؤال السادس : $\frac{ءص}{ءن} = ٢ن + ٥$

عندما ن=١ : $\frac{ءن}{ءس} = ٢$ أيضًا $\frac{ءص}{ءن} = ٢ \times ١ + ٥ = ٧$

عندما ن=١ : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = ٧ \times ٢ = ١٤$

السؤال السابع: $ن'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $هـ'(س) = -$ جاس

$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= (ن \circ هـ)'(س) = ن'($جتاس$) \times -$جاس

$= (ن \circ هـ)'(س) = (١ - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س}) \times -$جاس

$= \frac{\text{جتا}^{٢}س - ١}{\text{جتا}^{٢}س} \times -$جاس $=$ جا ^{٣} س قا ^{٢} س

السؤال الثامن : أ) نفرض م = ٢ س فيكون

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ظا}(٢س + هـ) - \text{ظا}(٢س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ظا}(م + هـ) - \text{ظا}(م)}{هـ}$

$= ($ظام$)^{-} =$ قا ^{٢} م $=$ قا ^{٢} ٢س

ب) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١ - ٣هـ)}{١٠هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١) - ن(١ - ٣هـ) + ن(١)}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١) - (ن(١ - ٣هـ) - ن(١))}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ + ٣هـ) - ن(١)}{١٠هـ} - \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(١ - ٣هـ) - ن(١)}{١٠هـ}$

$= \frac{٣}{١٠} \times ن'(١) - \frac{-٣}{١٠} ن'(١) = \frac{-٦}{٥}$ **بالفرض لكل حالة**

تمارين (١-٧) صفحة ٤٧

السؤال الأول :

أ) $٣س^٢ + ص + س ص^\prime + ٤ص ص^\prime = ٠$ ومنها $ص^\prime = \frac{-٣س^٢ - ص}{س + ٤ص}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٥}((١ - س^٢)^{\frac{-٤}{٥}} \times -٢س = \frac{-٢}{٥}س(١ - س^٢)^{\frac{-٤}{٥}}$

ج) $ص^\prime = جتا(س + ص)(١ + ص^\prime)$ بالتبسيط ينتج أن:

$$ص^\prime = جتا(س + ص) \times \frac{١}{١ - جتا(س + ص)}$$

د) $\frac{-ص^\prime}{ص^٢} - \frac{١}{س^٢} = ٠$ ومنها $ص^\prime = \frac{-ص^٢}{س^٢}$

السؤال الثاني : نجد نقط التقاطع $ص - ٥ + ص^٢ = ٢٥$ ومنها $ص = -٦$، $ص = ٥$،

عندما ص= -٦ لا يوجد س ، عندما ص=٥ فان س= ٠ ، ٣

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$ ، ميل المماس عندما س=٣ يساوي ٣

ميل العمودي $\frac{-١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{-١}{٣}(س - ٣) =$

$ص = \frac{-١}{٣}س + ٦$

ميل المماس عند ما س=٠ يساوي -٣

ميل العمودي $\frac{١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{١}{٣}(س) = \frac{١}{٣}س + ٥$

السؤال الثالث : بالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$٢ف\frac{ءف}{ءن} = ٢أن$ ومنها $ع(ن) = \frac{ءف}{ءن} = \frac{أن}{ف} = \frac{أن}{\sqrt{أن^٢ + ٢٤}}$

$ع(٢) = \frac{٢أ}{\sqrt{أ \times ٢^٢ + ٢٤}} = ١$ ومنها $أ = ٣$

السؤال الرابع : $ف = أجا(٢ن + م)$ ، $ع = ٢أجتا(٢ن + م)$ ،

$ت = -٤أجا(٢ن + م) = -٤ف$

السؤال الخامس : نفرض نقطة التماس (س، ص) ، لاحظ ان النقطة المعطاة خارجة عن منحنى العلاقة

$٨س + ٢ص ص^\prime = ٠$، ومنها $ص^\prime = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{ص}{س + ٢}$

ومنها $ص^{٢} = -٤س^{٢} - ٨س = ٤ - ٤س^{٢}$

$س = -\frac{١}{٢}$، $ص = \pm\sqrt{٣}$ ، نقط التماس هي $(-\frac{١}{٢}، \sqrt{٣})$، $(-\frac{١}{٢}، -\sqrt{٣})$

السؤال السادس: $هـ^{س} + هـ^{ص} ص' = -هـ^{-س} - هـ^{-ص} ص'$

عند النقطة $(-١، ١)$ يكون $\frac{١}{هـ} + هـ ص' = -هـ - هـ^{-١} ص'$

بالتبسيط ينتج أن : $ص' = -١$

السؤال السابع : $س^{٢} = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص$ بالاشتقاق ينتج أن:

$٢س = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص}$ ومنها $٢ = \frac{١}{١} + \frac{ص'}{هـ}$، $ص' = هـ$

السؤال الثامن : $\frac{ءص}{ءس} = م ن^{م-١} هـ^{م} ن' + م ن^{م} هـ^{م-١} هـ' = م ن^{م-١} هـ^{م-١} (ن' هـ + هـ' ن)$

بالضرب والقسمة على $ن \times هـ$ ينتج أن:

$$ص' = م ن^{م} هـ^{م} \times \frac{ن' هـ + هـ' ن}{ن هـ} = م ص \left(\frac{ن'}{ن} + \frac{هـ'}{هـ}\right)$$

ومنها $\frac{ص'}{ص} = م \left(\frac{ن'}{ن} + \frac{هـ'}{هـ}\right)$.

تمارين عامة (الوحدة الاولى) صفحة ٤٨

السؤال الأول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
د	ب	ج	د	ج	د	د	ج	أ	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

السؤال الثاني : $\lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{ق}(1+9\text{هـ})-\text{ق}(1)}{\sqrt{1+\text{هـ}}-1} = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\dfrac{\text{ق}(1+9\text{هـ})-\text{ق}(1)}{\text{هـ}}}{\dfrac{\sqrt{1+\text{هـ}}-1}{\text{هـ}}}$

$= 9\text{ق}'(1) \times \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{\text{هـ}}{\sqrt{1+\text{هـ}}-1} \times \dfrac{\sqrt{1+\text{هـ}}+1}{\sqrt{1+\text{هـ}}+1}$

(بالضرب بالمرافق والتبسيط) $= 9 \times -2 \times 2 = -36$

السؤال الثالث:متوسط التغير للاقتران ص = $\dfrac{\text{ق}(1)-\text{ق}(0)}{1-0} = 2\text{هـ}^{0} - \text{هـ}^{0} = 1$

السؤال الرابع : $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{ق}(\text{س}^2+2\text{س}-1)-\text{ق}(2)}{\text{س}^2-1}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(2\text{س}+2)\text{ق}'(\text{س}^2+2\text{س}-1)}{2\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}+1)\text{ق}'(\text{س}^2+2\text{س}-1)}{\text{س}} = 2\text{ق}'(2) = -2$

يمكن الحل باستخدام الفرض والقسمة .

السؤال الخامس: أ) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{هـ}^{4\text{س}}-1}{\text{ظاس}}$ ، بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{هـ}^{4\text{س}}-1}{\text{ظاس}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{4\text{هـ}^{4\text{س}}}{\text{قا}^2\text{س}} = 4$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}^2}-\text{هـ}^{\text{س}}}{2\text{س}}$ بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}^2}-\text{هـ}^{\text{س}}}{2\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2}-\text{هـ}^{\text{س}}}{2} = \dfrac{0-1}{2} = \dfrac{-1}{2}$

ج) $\lim_{س\to0} \frac{جا٢س - جاس}{٢س}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{\cdot}{\cdot}$ وبالتالي:

$$\lim_{س\to0} \frac{جا٢س - جاس}{٢س} = \lim_{س\to0} \frac{٢جتا٢س - جتاس}{٢} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

د) $\lim_{س\to0} \frac{١ - جتاس}{س جاس}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{\cdot}{\cdot}$ وبالتالي:

$\lim_{س\to0} \frac{١ - جتاس}{س جاس} = \lim_{س\to0} \frac{جاس}{جاس + س جتاس}$ وبالتعويض المباشر ينتج أيضا $\frac{\cdot}{\cdot}$ ونكمل تطبيق لوبيتال

$$\lim_{س\to0} \frac{١-جتاس}{س جاس} = \lim_{س\to0} \frac{جاس}{جاس + س جتاس} = \lim_{س\to0} \frac{جتاس}{جتاس + جتاس - س جاس} = \frac{١}{٢}$$

السؤال السادس: متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

$$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣} = \frac{٩ + ق(٢) - ق(٠)}{٣} = \frac{٩+٦}{٣} = ٥$$

السؤال السابع : $\lim_{س\to١} \frac{ق(س) - ٢}{س - ١} = \lim_{س\to١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ق'(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٢$ لأن

ق(س) متصلاً عند س = ١

$$\lim_{س\to١} \frac{س^٣ ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س\to١} \frac{س^٣ ق'(س) + ٣س^٢ ق(س)}{١}$$

$$= ق'(١) + ٣ق(١) = ٣ + ٣ \times ٢ = ٩$$

السؤال الثامن : نفرض أن زمن وصول كرة نزار ن وزمن وصول كرة أحمد ن+١

$ف_١(ن+١) = ف_٢(ن)$ ومنها $٥(ن+١)^٢ = ٥ ١ن + ٥ن^٢$

ن = ١ زمن وصول كرة نزار

سرعة ارتطام كرة نزار = $ف'(١) = ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$ م/ث

السؤال التاسع : $ق'(س) = أ جتاس$ ، $هـ'(س) = \frac{٣ - ٣س^٢}{(س^٢ + ١)^٢}$

$$(هـ \circ ق)'(\tfrac{\pi}{٦}) = هـ'(ق(\tfrac{\pi}{٦})) \times ق'(\tfrac{\pi}{٦}) = هـ'((\tfrac{أ}{٢})) \times (\tfrac{أ\sqrt{٣}}{٢}) = ٠$$

ومنها $هـ'(\frac{أ}{٢}) = ٠$ ومنها $هـ'(\frac{أ}{٢}) = ٣ - ٣(\frac{أ}{٢})^٢ = ٠$ ومنها $أ = \pm٢$

السؤال العاشر : لاحظ أن: ق(س) منفصل عدما س= ١ ، س=٢

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad س \in]١،٢[\\ ٢س & ، \quad س \in]٠،١[\\ \frac{-٢}{(س+١)^٢} & ، \quad س \in]٢،\infty[\end{cases}$$ عند س = ٠ ، ١، ٢ غير موجودة .

السؤال الحادي عشر : $ف = ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})$

$ع = ٢(٢هـ^{٢ن} + ٢هـ^{-٢ن})$ ، $ت = ٤(٢هـ^{٢ن} - ٢هـ^{-٢ن}) = ٤ف$

السؤال الثاني عشر : $ن'(س) = ٣جا^٢س جتاس + ٣جتا^٢س جاس$

$ن''(س) = -٣جا^٣س + ٦جاس جتا^٢س + ٣جتا^٣س - ٦جتا س جا^٢س$

$ن''(س) = -٣جا^٣\frac{\pi}{٤} + ٦جا\frac{\pi}{٤}جتا^٢\frac{\pi}{٤} + ٣جتا^٣\frac{\pi}{٤} - ٦جتا\frac{\pi}{٤}جا^٢\frac{\pi}{٤}$

$ن''(\frac{\pi}{٤}) = -٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ٦ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + ٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} - ٦ \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = ٠$

السؤال الثالث عشر : أ) $ن'(س) = ٣(س-٢)^٢(٣+٢س)^٤ + ٨(س-٢)^٣(٣+٢س)^٣$

$ن'(س) = (س-٢)^٢(٣+٢س)^٣(٨(س-٢)+٣(٣+٢س)) = ٠$

$ن'(س) = (س-٢)^٢(٣+٢س)^٣(١٤س-٧) = ٠$

$س = ٢ ، \frac{١}{٢}، \frac{-٣}{٢}$ ، $س = \frac{-٣}{٢}$ تهمل

ب) $ن'(س) = جتاس(١+جتاس) - جا^٢س = ٢جتا^٢س + جتاس - ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن القيمة المطلوبة هي $س = \frac{\pi}{٣}$

السؤال الرابع عشر : أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(هـ^{٦س} + ٦س هـ^{٦س}) جاس - س هـ^{٦س} جتاس}{جا^٢س}$

ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١+لـو_هـ س) جتاس + س جاس لـو_هـ س}{جتا^٢س}$

السؤال الخامس عشر : $ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن) = ٣$

$ع = ف'(ن) = أ(٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = أ(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = -٤أ(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م/ ث٢

السؤال السادس عشر : $ق'(س) = \frac{\frac{5}{2}-2}{2-1} = \frac{1}{2}$

$= 1 - \frac{1}{س^2} = \frac{1}{2}$ ، $س = \pm\sqrt{2}$

النقاط هي $\left(\sqrt{2}، ق(\sqrt{2})\right)$، $\left(-\sqrt{2}، ق(-\sqrt{2})\right)$.

حلول الوحدة الثانية/ تطبيقات التفاضل

تمارين (٢-١) صفحة ٥٩

السؤال الأول :

أ) $ق(س) = \sqrt{4س - س^2}$ على الفترة $[0، 4]$

نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[0، 4]$

ق(س) متصل على $[0، 4]$

$ق'(س) = \frac{1}{2}(4س - س^2)^{\frac{-1}{2}} \times (4 - 2س)$، $س \in]0،4[$

$\Leftarrow ق'(س) = \frac{2 - س}{\sqrt{4س - س^2}}$ ، ق قابل للاشتقاق في $]0،4[$

ق(٠)= صفر ، ق(٤) = صفر $\Leftarrow$ ق(٠) = ق(٤)

تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ $\in]0،4[$: $ق'(جـ) = 0$

$\frac{2 - جـ}{\sqrt{4جـ - جـ^2}} = 0 \Leftarrow جـ = 2 \in]0،4[$

ب) $ق(س) = س^2 - 2س - 3$ على الفترة $[-1، 3]$

الحل: $ق(س) = س^2 - 2س - 3$، $س \in [-1، 3]$

ق(س) متصل على $[-1،3]$ وقابل للاشتقاق على $]-1،3[$ لأنه كثير حدود

ق(-١) = ق(٣) = صفر

إذن تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في $[-1،3]$ ومنها يوجد جـ $\in]-1،3[$: $ق'(جـ) = 0$

$ق'(س) = 2س - 2$

$-2 + 2جـ = 0 \Leftarrow جـ = 1 \in]-1،3[$

ج) $ق(س) = لـو_{هـ}\left(س + \frac{1}{س}\right)$ ، $س \in \left[\frac{1}{2} ، 2\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{1}{2}،2\right]$

ق(س) متصل في $\left[\frac{1}{2}،2\right]$ لانه اقتران لوغريتمي والفترة ضمن مجاله

$$ق'(س) = \frac{1}{س + \frac{1}{س}} \times \left(1 + \frac{-1}{س^2}\right) \text{ ، } س \in \left[\frac{1}{2} ، 2\right]$$

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{1}{2} ، 2\right[$

$$ق(\tfrac{1}{2}) = لـو_{هـ}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$ق(2) = لـو_{هـ}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{5}{2}\right)$$

إذن $ق(\tfrac{1}{2}) = ق(2)$

تحققت شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{1}{2}،2\right]$

إذن E جـ $\in \left]\frac{1}{2}،2\right[$: $ق'(جـ) = 0$

$$\frac{1}{جـ + \frac{1}{جـ}} \times \left(1 + \frac{-1}{جـ^2}\right) = 0$$

$\left(\frac{جـ^2 - 1}{جـ^2}\right) = 0$ وعندما $\left(\frac{جـ^2 - 1}{(جـ^2)}\right) = 0$ إذن $جـ^2 - 1 =$ صفر ومنها جـ $= 1 \in \left]\frac{1}{2} ، 2\right[$

لاحظ ان جـ = -1 $\notin \left]\frac{1}{2}،2\right[$ (تهمل)

د) $ق(س) = جا2س + 2جاس$ ، $س \in \left[0،\frac{\pi}{2}\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $\left[0،\frac{\pi}{2}\right]$ ، ق(س) متصل على $\left[0،\frac{\pi}{2}\right]$

ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $\left]0،\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $ق'(س) = 2جتا2س + 2جتاس$

$ق(0) =$ صفر ، $ق(\frac{\pi}{2}) = 2 \Leftarrow ق(0) \neq ق(\frac{\pi}{2})$

إذن لم تتحقق شروط نظرية رول $\Leftarrow$ قد يوجد ج

$ق'(ج) =$ صفر $\Leftarrow$ ٢جتا٢ج + ٢جتاج = ٠

جتا٢ج+جتاج = ٠ $\Leftarrow$ ٢جتا^{٢}ج+جتاج − ١ = ٠

$\left(٢\text{جتاج} - ١\right)\left(\text{جتاج} + ١\right) = ٠ \Leftarrow$ جتاج $= \frac{١}{٢} \Leftarrow$ ج $= \frac{\pi}{٣} \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

او $\left(\text{جتا ج} + ١\right) = ٠ \Leftarrow$ جتاج $= -١ \Leftarrow$ ج $= \pi$ (تهمل)

السؤال الثاني:

أ) $ق(س) = س^٣ - س - ١$ ، س $\in [{}^-١، ٢]$

ق(س) متصل على $[{}^-١، ٢]$ ، كثير حدود

$ق'(س) = ٣س^٢ - ١$ ، س $\in]{}^-١، ٢[$ ، ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في الفترة $[{}^-١، ٢]$

$\Leftarrow \exists$ ج $\in]{}^-١، ٢[: ق'(ج) = \frac{ق(٢) - ق({}^-١)}{٢ - ({}^-١)}$

$٣ج^٢ - ١ = \frac{٥ - ({}^-١)}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$

$٣ج^٢ = ٣ \leftarrow ج^٢ = ١ \leftarrow ج = ١ \in]{}^-١، ٢[$ ، ج $= {}^-١$ (تهمل)

ب) $ق(س) = \frac{٤}{س + ٢}$ ، س $\in [{}^-١، ٢]$

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[{}^-١، ٢]$

ق(س) متصل على $[{}^-١، ٢]$

$ق'(س) = \frac{٤ \times {}^-١}{(س + ٢)^٢}$ ، س $\in]{}^-١، ٢[$

ق قابل للاشتقاق في $]{}^-١، ٢[$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow \exists$ ج $\in]{}^-١، ٢[$ بحيث

$ق'(ج) = \frac{ق(٢) - ق({}^-١)}{٢ - (-١)} = \frac{{}^-٤}{(ج + ٢)^٢} = \frac{١ - ٤}{٣}$

$\frac{{}^-٤}{(ج + ٢)^٢} = \frac{-٣}{٣} \Leftarrow \frac{{}^-٤}{(ج + ٢)^٢} = {}^-١$ ومنها $٤ = (ج + ٢)^٢$

$ج + ٢ = {}^\pm٢ \Leftarrow$ ج=صفر أو ج = ـ٤ ترفض ومنها قيمة ج المطلوبة هي الصفر

ج) $ق(س) = \sqrt{س} + ٢س$ ، س ∋ [٤،٩]

الحل : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٤،٩]

ق(س) متصل في [٤،٩] ، وقابل للاشتقاق في]٤،٩[حيث

$$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٤،٩]

$$\Leftarrow \exists\, جـ \in]٤،٩[: ق'(جـ) = \frac{ق(٩) - ق(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{٢١ - ١٠}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + ٢ = \frac{١١}{٥} \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{١}{٥}$$

$$\Leftarrow ٢\sqrt{جـ} = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٢٥}{٤} \in]٤،٩[$$

السؤال الثالث:

$$ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ٢س & ، ٠ \le س \le ٢ \\ س^٣ - بس + ١٢ & ، ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$ **يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة**

إذن ق(س) متصل على [٠،٣] وقابل للاشتقاق على]٠،٣[

ق متصل على [٠،٣] $\Leftarrow \lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$

$\Leftarrow ٤أ + ٤ = ٨ - ٢ب + ١٢ \Leftarrow ٤أ + ٢ب = ١٦$ ①

$٢أ + ب = ٨$ -------

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢أس + ٢ & ، ٠ < س \le ٢ \\ ٣س^٢ - ب & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$$ق'(٢^+) = ق'(٢^-) \Leftarrow ٤أ + ٢ = ١٢ - ب$$

$٤أ + ب = ١٠$ -------- ② **وبحل المعادلتين (١) ، (٢)**

$$٤أ + ب = ١٠$$
$$٢أ + ب = ٨$$

$$٢أ = ٢ \Leftarrow أ = ١ \Leftarrow ٢ \times ١ + ب = ٨ \Leftarrow ب = ٦$$

لإيجاد قيمة جـ : $ق'(جـ) = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٢١ - ٠}{٣} = ٧$

عندما $٠ < جـ \leq ٢$ ، $٢جـ + ٢ = ٧ \Leftarrow ٢جـ = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٥}{٢}$ ترفض

عندما $٢ < جـ < ٣$ ، $٣جـ^{٢} - ٦ = ٧ \Leftarrow ٣جـ^{٢} = ١٣ \Leftarrow جـ = \sqrt{\frac{١٣}{٣}} \in]٠،٣[$

السؤال الرابع:

$ق(س) = \frac{١}{س}$ ، س $\in$ [أ،ب] ، س > ٠. أثبت باستخدام نظرية القيم المتوسطة ان $جـ^{٢} = أب$

البرهان : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل لأن س > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [أ،ب]

$ق'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} \leftarrow$ ق قابل للاشتقاق على]أ،ب[لأن س > ٠

إذن تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ومنها $\exists$ جـ $\in$]أ،ب[بحيث $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{\frac{١}{ب} - \frac{١}{أ}}{ب - أ} \Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{أ - ب}{أب(ب - أ)}$$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{-١}{أب} \Leftarrow جـ^{٢} = أب$$ وهو المطلوب

السؤال الخامس:

$ع(س) = ق \circ هـ(س)$ ، س $\in$ [أ،ب]، ق، هـ متصلين على الفترة [أ،ب] وقابلين للاشتقاق على الفترة]أ،ب[

هـ(أ) = ب، هـ(ب) = أ أثبت أنه $\exists$ جـ $\in$]أ،ب[: $ع(أ) - ع(ب) = ق'(جـ)(ب - أ)$

البرهان:

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل على [أ،ب] وقابل للاشتقاق على]أ،ب[من المعطيات

تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \exists جـ \in]أ،ب[: ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

لكن ب = هـ(أ) ، أ = هـ(ب) إذن $ق'(جـ) = \frac{ق(هـ(أ)) - ق(هـ(ب))}{ب - أ}$

$$ن'(ج) = \frac{ع(ب) - ع(أ)}{ب - أ}$$

$ن'(ج)(ب - أ) = ع(ب) - ع(أ)$ **وهو المطلوب**

السؤال السادس:

البرهان : $ن(س) = س جتا س$ ، $س \in \left[\cdot ، \frac{\pi}{2}\right]$

$ن(س)$ **متصل على** $\left[\cdot ، \frac{\pi}{2}\right]$ **وقابل للاشتقاق على** $\left]\cdot ، \frac{\pi}{2}\right[$

ق(٠) =صفر ، $ن(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times \cdot = \cdot \Leftarrow ن(\cdot) = ن(\frac{\pi}{2})$

إذن تحققت شروط نظرية رول ومنها $\Leftarrow E ج \in \left]\cdot ، \frac{\pi}{2}\right[: ن'(ج) = \cdot$

$ن'(س) = س \times - جا س + جتا س \times ١$

$ن'(س) = جتا س - س جا س$ ومنه $ن'(ج) = جتا ج - ج جا ج$

وبالتالي ظتا ج =ج   القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س

تمارين (٢-٢) صفحة ٦٤

السؤال الاول:

أ) ق(س)= ٣س٢- س٣ ، س ∈ [-٢، ٥]

الحل : ق(س) متصل على [-٢، ٥]

$ن'(س) = ٦س - ٣س^٢$

صفر=٣س (٢- س)

س= صفر أو س =٢

اشارة ن'(س): (-٢ ، ٠) - - - | (٠ ، ٢) + + | (٢ ، ٥) - - -

من اشارة ن´(س) فإن ق(س) متناقص في [-٢، ٠] ، [٢، ٥] ومتزايد في [٠، ٢]

ب) $ن´(س) = س + جا^٢ س$ ، $س \in [\cdot ، \pi]$

الحل: $ن(س)$ **متصل في** $[\cdot ، \pi]$

$ن´(س) = ١ + ٢جا س جتا س = ١ + جا ٢س$ ، $س \in]\cdot ، \pi[$

اشارة ن'(س): (٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) + + + | ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، π) + + +

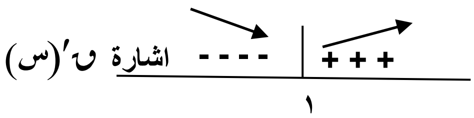
$^{-}١ =$ جا٢س $\Leftarrow$ س $= \frac{٣\pi}{٤}$

من اشارة ق $'$(س) فإن

ق(س) متزايد في $[٠،\pi]$

ج) ق(س) $= \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$

الحل: ق(س) $= \sqrt{(\text{س} - ١)^{٢}} = |\text{س} - ١|$، س $\in$ ح

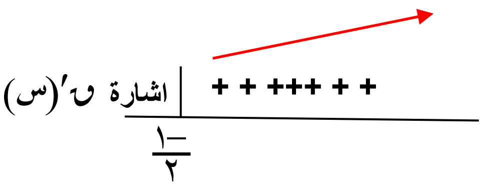


$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{،}\ \text{س} \geq ١ \\ ^{-}\text{س} + ١ & \text{،}\ \text{س} < ١ \end{cases}$$ متصل على ح

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ١ & \text{،}\ \text{س} > ١ \\ ^{-}١ & \text{،}\ \text{س} < ١ \end{cases}$$

من اشارة ق $'$(س) فإن ق(س) متناقص في $]{^{-}\infty}،١]$ ومتزايد في $[١،\infty[$

السؤال الثاني:



الحل: ق $'$(س) $= ٢ - \frac{١}{\text{س}+١}$

ق $'$(س) $= ٢ - \frac{١}{\text{س}+١} = ٠$

ومنها س $= \frac{-١}{٢}$

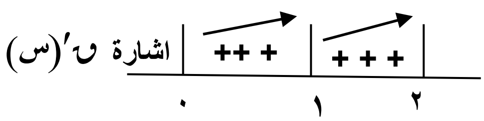
ومنها ق متزايد على الفترة $]\frac{-١}{٢}،\infty[$ وبالتالي متزايد على ح$^{+}$

السؤال الثالث:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & \text{،}\ ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} - ٢ & \text{،}\ ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

لاحظ ان ق غير متصل عند س=١ لان

$\lim_{\text{س}\to ١^{-}}$ ق(س) $= ١$ ، $\lim_{\text{س}\to ١^{+}}$ ق(س) $= ١ - ٢ = {^{-}١}$ ، النهاية غير موجودة



وبالتالي ق $'$(١) غير موجودة

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & \text{،}\ ٠ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & \text{،}\ ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

ق $'$(س)$\neq$ ٠ لجميع قيم س في المجال ، ق $'$(س) موجبة دائما

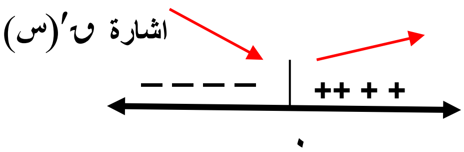
ق(س) متزايد في $[٠،١[$ ، و متزايد في $[١،٢]$

السؤال الرابع :

ن′(س) = هـ(س) ، هـ′(س) = −ن(س) ، ك(س) = ن²(س) + هـ²(س) + س²

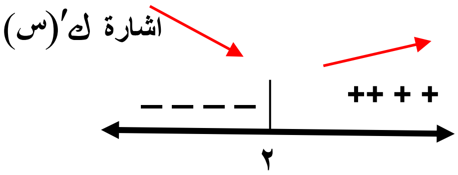
الحل : ك′(س) = ٢ن(س)ن′(س) + ٢هـ(س)هـ′(س) + ٢س

= ٢ن(س) × هـ(س) − ٢هـ(س) × ن(س) + ٢س = ٠ + ٢س



ك′(س) = ٢س

ك(س) متزايد في [٠،∞[ك(س) متناقص في]−∞،٠]



السؤال الخامس : ك(س) = ق(س² − ٤س)

ك متصل على ح لانه كثير حدود

ك′(س) = ق′(س² − ٤س) × (٢س − ٤)

ك′(س) = ٠ ⇐ (٢س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٢ لان ن′(س) ≠ ٠ كون ق متزايد

ك(س) متزايد [٢،∞[، ك(س) متناقص عندما]−∞،٢]

السؤال السادس :

الحل : ن(س)،هـ(س) كثيرا حدود في [٠،٤] ← متصلين في [٠،٤] وقابلين للاشتقاق في]٠،٤[

ن(س) متناقص في مجاله اذن ن′(س) < ٠، ∀ س ∈]٠،٤[

يقع منحنى ن(س) في الربع الرابع اذن ن(س) < ٠، ∀ س ∈ [٠،٤]

هـ(س) متزايد في مجاله اذن هـ′(س) > ٠، ∀ س ∈]٠،٤[

يقع منحنى هـ(س) في الربع الاول اذن هـ(س) > ٠، ∀ س ∈ [٠،٤]

لكن (ن(س) × هـ(س))′ = ن(س) × هـ′(س) + ن′(س) × هـ(س)

اشارة (ن(س) × هـ(س))′ = سالب × موجب + موجب × سالب = سالب

اذن ن(س) × هـ(س) متناقص في [٠،٤]

السؤال السابع :

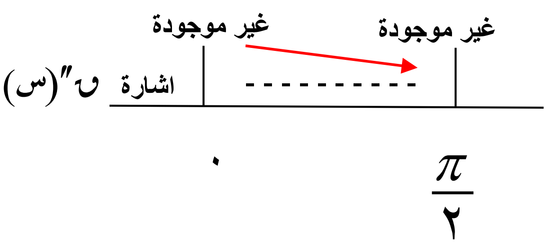
$$\text{ن}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جتاس} \text{ ، س} \in \left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = \text{جتاس} - \text{جاس} \text{ ، س} \in \left]\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right[$$

ولمعرفة مجالات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ن}'(\text{س})$ نبحث في اشارة $\text{ن}''(\text{س})$

$$\text{ن}''(\text{س}) = -\text{جاس} - \text{جتاس} = \text{٠} \quad \text{أي أن}$$

$$\text{ظاس} = -\text{١} \leftarrow \text{س} = \frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}} \notin \left]\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right[$$



$\text{ن}'(\text{س})$ متناقص في $\left]\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right[$

تمارين (٢-٣) القيم القصوى صفحة ٧٤

السؤال الاول :

أ) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{ ، س} \in [-\text{٢}، \text{٣}]$$

الحل: $\text{ن}'(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} \text{ ، س} \in]-\text{٢}، \text{٣}[$

صفر $= \text{س}(\text{س} - \text{٢}) \leftarrow \text{س} = \text{٠}$ أو $\text{س} = \text{٢}$

النقاط الحرجة هي

$$\left(-\text{٢}، \text{ن}(-\text{٢})\right) ، \left(\text{٣}، \text{ن}(\text{٣})\right) ، \left(\text{٠}، \text{ن}(\text{٠})\right) ، \left(\text{٢}، \text{ن}(\text{٢})\right)$$

$$\left(-\text{٢}، \frac{-\text{١٩}}{\text{٣}}\right) ، \left(\text{٣}، \tfrac{\text{١}}{\text{٣}}\right) ، \left(\text{٠}، \tfrac{\text{١}}{\text{٣}}\right) ، \left(\text{٢}، -\text{١}\right)$$

ب) $$\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} \text{ ، س} \in [-\text{٨}، \text{٨}]$$

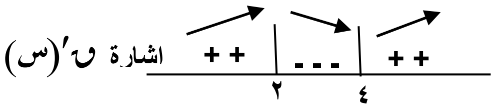
$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}} \text{ ، س} \neq \text{٠} \leftarrow \text{س} \in]-\text{٨}، \text{٨}[- \{\text{٠}\}$$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣ \times \sqrt[٣]{س}}$ ، $س \neq ٠$

النقط الحرجة هي (٠،٠) ، (-٨، ٤) ، (٨، ٤)

السؤال الثاني :

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، $س \in ح$



الحل: $ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

$صفر = ٣\left(س^{٢} - ٦س + ٨\right) = ٣(س - ٤)(س - ٢)$

أي أن : س=٤ أو س=٢

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

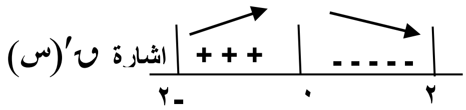
ق(٢)= ٨-٩×٤+٢٤×٢=٨-٣٦+٤٨=٢٠ قيمة عظمى محلية

ق(٤)=٦٤-٩×١٦+٢٤×٤=٦٤-١٤٤+٩٦=١٦ قيمة صغرى محلية

ب) $ق(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ **المجال** $٤ - س^{٢} \geq ٠ \leftarrow س \in [-٢، ٢]$

$ق'(س) = \frac{١}{٢}\left(٤ - س^{٢}\right)^{\frac{-١}{٢}} \times -٢س = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، $س \in]-٢، ٢[$

$ق'(س) = صفر \leftarrow س = صفر$



$ق(-٢) = ق(٢) = صفر$ **قيمة صغرى محلية**

$ق(٠) = ٢$ **قيمة عظمى محلية**

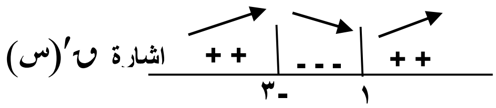
ج) $ق(س) = \left(س^{٢} - ٣\right)هـ^{س}$ ، $س \in ح$

الحل: $ق'(س) = \left(س^{٢} - ٣\right)هـ^{س} + ٢س\,هـ^{س}$ ، $س \in ح$

$٠ = \left(س^{٢} - ٣\right)هـ^{س} + ٢س\,هـ^{س} \leftarrow ٠ = هـ^{س}\left(س^{٢} + ٢س - ٣\right)$

$\leftarrow ٠ = هـ^{س}(س + ٣)(س - ١) \leftarrow س = -٣$ ، $س = ١$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي



$ق(-٣) = ٦هـ^{-٣}$ **قيمة عظمى محلية**

$ق(١) = -٢هـ$ **قيمة صغرى محلية**

د) $ق(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

الحل: $ق(س) = س^{٢} + س + ١$ ، $س \neq ١$

$ق'(س) = ٢س + ١$

صفر= $ق'(س) \leftarrow س = \frac{-١}{٢}$

اشارة $ق'(س)$: $- - -$ | $+ + +$ | $+ +$ عند $\frac{-١}{٢}$ ، ١

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي

$ق(\frac{-١}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ) $ق(س) = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل: $ق(س) = جتا٢س$ ، $س \in [٠، \pi]$

$ق'(س) = -جا٢س \times ٢ = -٢جا٢س$ ، $س \in]٠، \pi[$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow ٠ = -٢جا٢س \Leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin]٠، \pi[$

$٢س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ أو $٢س = ٢\pi \leftarrow س = \pi \notin]٠، \pi[$

اشارة $ق'(س)$: | $- - - - -$ | $+ + +$ | عند ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

$ق(٠) = ١$ قيمة عظمى محلية

$ق(\pi) = ١$ قيمة عظمى محلية

$ق(\frac{\pi}{٢}) = -١$ قيمة صغرى محلية

و) $ق(س) = هـ^{-(س-٢)^{٢}}$ ، $س \in ع$

الحل: $ق'(س) = هـ^{-(س-٢)^{٢}} \times -٢(س-٢) \times ١ = -٢(س-٢)هـ^{-(س-٢)^{٢}}$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

$ق(٢) = ١$ قيمة عظمى محلية

اشارة $ق'(س)$: $+ + +$ | $- - - - -$ عند ٢

السؤال الثالث:

أ) $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} ، & ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ ، & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٠، ٣]$

الحل: $\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ق(٢) = ٨$

إذن ق متصل في [٠، ٣]

$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} ، & ٠ < س < ٢ \\ ٢س ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

ن′(س) غير موجودة عند س=٠، ٢، ٣

ن′(س) =٠

عندما ٠> س > ٢ ⟸ ٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠ ترفض

عندما ٢ >س> ٣ ← ٢س = ٠ ← س = ٠ ترفض

القيم القصوى المحلية ق(٠) = صفر ، ق(٢) = ٨ ، ق(٣) = ١٣

ق(٠) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(٣)=١٣ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

ب) ن(س) = هـ^{س} -هـ س ، س ∈ [٠،٣]

الحل: ق متصل (حاصل طرح متصلين)

ن′(س) = هـ^{س} -هـ ، س ∈]٠،٣[←٠= هـ^{س} -هـ ← س =١

القيم القصوى المحلية ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(٣) = هـ^{٣} -٣هـ

ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

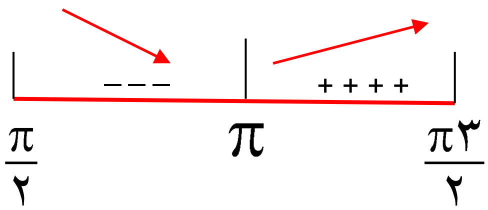
ق(٣)= هـ^{٣} -٣هـ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة) حسب نظرية القيم القصوى

ج) ع(س) =جتاس-$\frac{١}{٣}$جتا^{٣} س ، س∈ [$\frac{\pi}{٢}$،$\frac{٣\pi}{٢}$] ، **ق متصل (حاصل طرح متصلين)**

ع′(س) =-جاس+جتا^{٢}س جاس = -جا^{٣} س

ع′(س) = -جا^{٣} س =٠⟸ جاس=٠⟸س=π

ع($\frac{\pi}{٢}$) =جتا$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ - $\frac{١}{٣}$جتا$^{٣}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ =٠ **عظمى مطلقة**



ع($\frac{٣\pi}{٢}$) =جتا($\frac{٣\pi}{٢}$) - $\frac{١}{٣}$جتا^{٣}($\frac{٣\pi}{٢}$) =٠ **عظمى مطلقة**

ع(π) =جتا(π) - $\frac{١}{٣}$جتا^{٣}(π) = $\frac{-٢}{٣}$ **صغرى مطلقة**

السؤال الرابع :

ن(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، ق(١) عظمى محلية ، ق(٣) صغرى محلية

الحل: للاقتران نقط حرجة عند س=١ ، س=٣ ⟸ ن′(١) = ن′(٣) = ٠

ن′(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + ٩

ق'(١) = ٣أ + ٢ب + ٩ ⟸ ٣أ + ٢ب + ٩ = صفر --------- (١)

ق'(٣) = ٣أ × ٣ ^{٢} + ٢ب × ٣ + ٩

٠ = ٢٧أ + ٦ب + ٩

٠ = ٩أ + ٢ب + ٣ ---------- (٢) وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

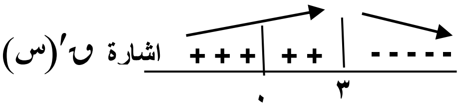
$^{-}$٦أ + ٦ = ٠ ← أ = ١ ⟸ ب = $^{-}$٦

السؤال الخامس:

الحل: ق(س) = ٤س ^{٣} − س ^{٤} − ٢٩ متصل على ح لانه كثير حدود

ق'(س) = ١٢س ^{٢} − ٤س ^{٣}

صفر = ٤س ^{٢}(٣ − س) ← س = ٠، س = ٣



ق(٣) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لانها وحيدة

ق(٣) = ٤×٢٧-٨١-٢٩ = ١٠٨-١١٠ = -٢

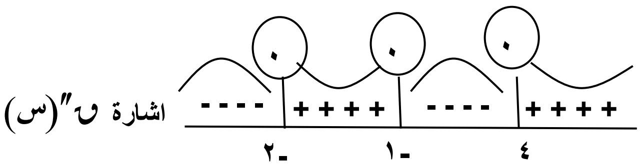
إذن ق(س) ≤ $^{-}$٢، ∀ س ∈ ح ⟸ ق(س) سالب دائماً

تمارين (٢-٤) التقعر ونقط الانعطاف صفحة ٨١

السؤال الأول :

أ) ق''(س) = (س ^{٢} − ٣س − ٤)(س + ٢)

٠ = (س + ١)(س − ٤)(س + ٢) ← س = −٢، −١، ٤



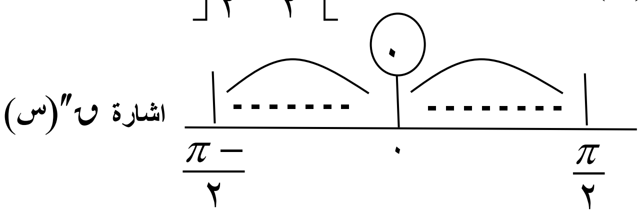
مجالات التقعر للاقتران ق(س) هي :

ق(س) مقعرا الى اعلى في]−٢، −١[كذلك في]٤، ∞[،

ومقعرا الى اسفل في]−∞، −٢[كذلك في]−١، ٤[

ب) ق'(س) = جاس − س ، س ∈]$\frac{-\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$[، ق''(س) = جتاس − ١ ، س ∈]$\frac{-\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$[

٠ = جتاس − ١ ← جتاس = ١ ← س = ٠

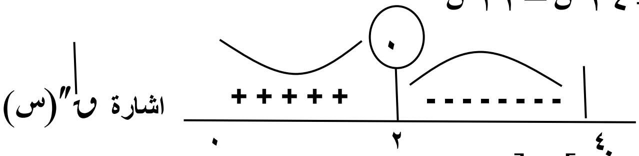


ق(س) مقعر الى اسفل في]$\frac{-\pi}{٢}$، ٠[كذلك في]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

ج) ق(س) = ٤س ^{٣} − س ^{٤} + س، س ∈ [٠، ٤]

ق'(س) = ١٢س ^{٢} − ٤س ^{٣} + ١، س ∈]٠، ٤[

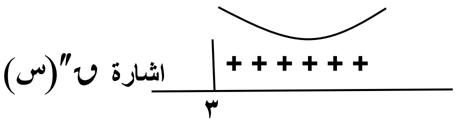
$ن''(س) = ٢٤س - ١٢س^٢$ ، $س \in]٠،٤[\leftarrow ٠ = ٢٤س - ١٢س^٢$



$\leftarrow س = ٢$ ، $س = ٠ \notin]٠،٤[$

ن(س) مقعر الى اسفل في]٢،٤[و مقعر الى اعلى في]٠،٢[

د) $ن(س) = (س - ٣)^{\frac{٣}{٢}}$ ، **مجال ن(س) هو** $س \geq ٣$



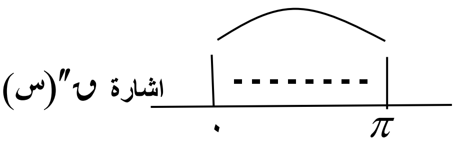
$ن'(س) = \frac{٣}{٢}(س - ٣)^{\frac{١}{٢}}$ ، $س \in]٣،\infty[$

$ن''(س) = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}(س - ٣)^{\frac{-١}{٢}} = \frac{٣}{٤}(س - ٣)^{\frac{-١}{٢}}$ ، $س \in]٣،\infty[$ ، ن″(س) **موجبة دائما**

و $ن''(س) \neq ٠، \forall س \in]٣،\infty[$ ومنها ن(س) مقعر الى اعلى في]٣،∞[

هـ) $ن(س) = جا\frac{س}{٢}$ ، $س \in]٠،\pi[\leftarrow ن'(س) = \frac{١}{٢}جتا\frac{س}{٢}$ ، $س \in]٠،\pi[$

$ن''(س) = \frac{-١}{٤}جا\frac{س}{٢}$ ، $س \in]٠،\pi[$



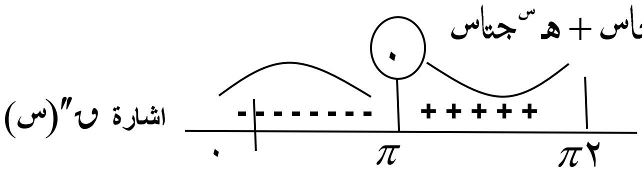
$ن''(س) = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{-١}{٤}جا\frac{س}{٢}$

$\leftarrow \frac{س}{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠$ او $\leftarrow \frac{س}{٢} = \pi \leftarrow س = ٢\pi$ **ترفض فيكون ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[**

و) $ن(س) = هـ^س جتاس$ ، $س \in]٠،٢\pi[\leftarrow ن'(س) = -هـ^س جاس + هـ^س جتاس$ ، $س \in]٠،٢\pi[$

$ن''(س) = -هـ^س جتاس + هـ^س جاس + -هـ^س جاس + هـ^س جتاس$

$= -٢هـ^س جاس$ ، $س \in]٠،٢\pi[$



$ن''(س) = ٠ \leftarrow ٠ = -٢هـ^س جاس \leftarrow س = \pi$

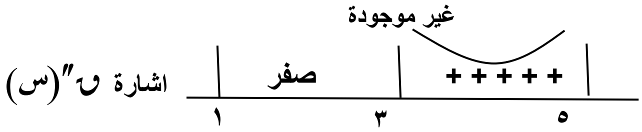
ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[و ن(س) مقعر الى اعلى في]π،٢π[

ز) $ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{1}{3}س - 1\right] &، 1 < س \le 3 \\ س^3 &، 3 < س \le 5 \end{cases} = \begin{cases} -1 &، 1 < س < 3 \\ 0 &، س = 3 \\ س^3 &، 3 < س \le 5 \end{cases}$

$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = -1$ ، $\lim_{س \to 3^+} ق(س) = 27$ ، $ق(3) = 0 \leftarrow ق(س)$ **غير متصل عند س=٣**

ومنها فان $ق'(3)$ غير موجودة

$ق'(س) = \begin{cases} 0 &، 1 < س < 3 \\ 3س^2 &، 3 < س < 5 \end{cases}$



$ق''(س) = \begin{cases} 0 &، 1 < س < 3 \\ 6س &، 3 < س < 5 \end{cases}$

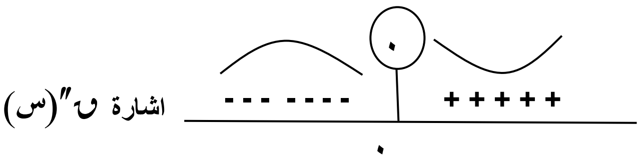
$ق''(س) = 6س = 0 \leftarrow س = 0 \notin]3،5[$

ق(س) اقتران ثابت في]١،٣[، و مقعر الى اعلى في]٣،٥[

السؤال الثاني : أ) $ق(س) = س^3 + س$ **متصل على ح لانه كثير حدود**

$ق'(س) = 3س^2 + 1 \leftarrow ق''(س) = 6س$

$ق''(س) = 0 \leftarrow س = 0$

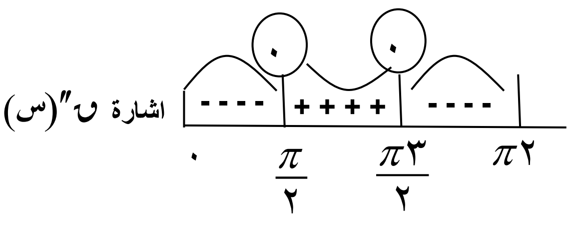


$(0، ق(0)) = (0،0)$ **نقطة انعطاف لان الاقتران متصل عندها ويغير من مجال تقعره**

ب) $ق(س) =$ جتاس **متصل في** $]0، 2\pi[$

$ق'(س) = -$جاس $\leftarrow ق''(س) = -$جتاس ، $س \in]0، 2\pi[$

$ق''(س) = 0 \leftarrow س = \frac{\pi}{2}$ ، $س = \frac{3\pi}{2}$

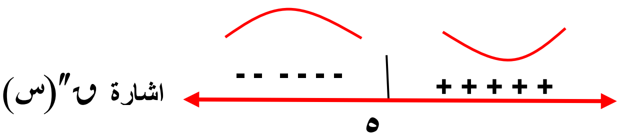


نقاط الانعطاف هي : $\left(\frac{\pi}{2}، ق\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}، 0\right)$ ، $\left(\frac{3\pi}{2}، ق\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}، 0\right)$

لأن الاقتران متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره .

ج) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{٥ - \text{س}}$ ، ← $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(٥ - \text{س})^{\frac{-٢}{٣}}$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{٣}(٥ - \text{س})^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[3]{(٥ - \text{س})^{٥}}}$$



$\text{ق}''(\text{س}) \neq ٠ \quad \forall \text{س} \in \text{ح}$

اذن يوجد نقطة انعطاف عندما س = ٥ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره وهي (٥،٠)

السؤال الثالث :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} \leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} \leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س} + ١٢$

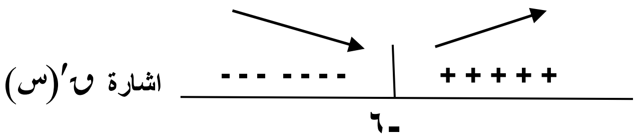
$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow ٠ = ٣\text{س}(\text{س} + ٤) \leftarrow \text{س} = ٠ ، \text{س} = -٤$

$\text{ق}''(٠) = ١٢ > ٠ \leftarrow \text{ق}(٠) = ٠$ **قيمة صغرى محلية**

$\text{ق}''(-٤) = -١٢ < ٠ \leftarrow \text{ق}(-٤) = ٣٢$ **قيمة عظمى محلية**

ب) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} + ٦| = \begin{cases} \text{س} + ٦ ، & \text{س} > -٦ \\ -\text{س} - ٦ ، & \text{س} \leq -٦ \end{cases}$ **متصل على ح**

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ١ ، & \text{س} > -٦ \\ -١ ، & \text{س} < -٦ \end{cases}$



$\text{ق}'(-٦)$ **غير موجودة اذن** $\text{ق}''(-٦)$ **غير موجودة**

فشل اختبار المشتقة الثانية ومنها فإن $\text{ق}(-٦) = ٠$ قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة

السؤال الرابع:

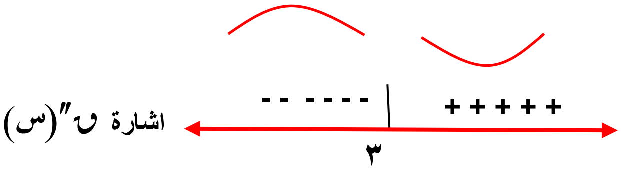
$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}$ **له عند س= -١ نقطة انعطاف** $\leftarrow \text{ق}''(-١) = ٠$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{أ}\text{س} + ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٢\text{أ} + ٦\text{س} \Leftarrow \text{ق}''(^{-}١) = ٢\text{أ} - ٦$

$٠ = ٢\text{أ} - ٦ \leftarrow \text{أ} = ٣$

السؤال الخامس:



ق′(٠) = ق′(٦) = ٠

أ) من اشارة ق″(س)

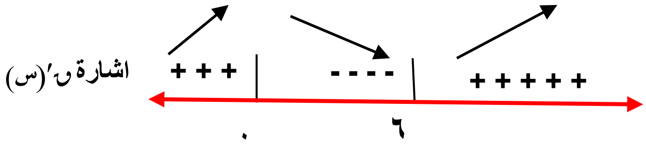
ق(س) مقعر إلى أسفل في]−∞،٣[ومقعر إلى اعلى في]٣،∞[

يوجد نقطة انعطاف عندما س=٣ لان ق متصل (المشتقة موجودة)

ويغير من مجال تقعره هي (٣،ق(٣)) .

ب) ق′(٠) = ٠ ، ق″(٠) < ٠ ⇐ ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق′(٦) = ٠ ، ق″(٦) > ٠ ⇐ ق(٦) قيمة صغرى محلية



ج) ق(س) متزايد في]−∞،٠]

وأيضا في [٦،∞[ومتناقص في [٠،٦]

السؤال السادس:

المعطيات: ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د :أ،ب،جـ،د ∈ ح

منحنى ق يمر بالنقطة (١، ٥) ← ق(١)=٥

(٢، ١) نقطة انعطاف ← ق(٢)=١ ، ق″(٢) = ٠

معادلة المماس عند (٢، ١) هي ٣س+ص=٧ ← ق′(٢) = −٣

الحل: ق(١) = أ + ب + جـ + د ⇐ ٥ = أ + ب + جـ + د --------- ١

ق(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د ⇐ ١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د ----------- ٢

ق′(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

ق′(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ ⇐ −٣ = ١٢أ + ٤ب + جـ -------------- ٣

ق″(س) = ٦أ س + ٢ب

ق″(٢) = ١٢أ + ٢ب ⇐ ٠ = ٦أ + ب -------------- ٤

بحل نظام المعادلات نحصل على

أ = −١، ب = ٦، جـ = −١٥، د = ١٥

إذن ق(س) = −س^{٣} + ٦س^{٢} − ١٥س + ١٥

السؤال السابع :

المعطيات: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^4 - 4\text{س}^3 + \text{ك}(\text{س})$

(١، ٢) نقطة انعطاف افقي للاقتران ق(س) $\Leftarrow \text{ق}(1) = 2 ،\ \text{ق}'(1) = 0 ،\ \text{ق}''(1) = 0$

$\text{ع}(\text{س}) = \text{ك}^2(\text{س})$ **احسب** $\text{ع}''(1)$

الحل: $\text{ق}(1) = 1^4 - 4\times 1^3 + \text{ك}(\text{س}) \Leftarrow 2 = 1 - 4 + \text{ك}(1) \Leftarrow \text{ك}(1) = 5$

$\text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س}^3 - 12\text{س} + \text{ك}'(\text{س})$

$\text{ق}'(1) = 4 - 12 + \text{ك}'(1) \Leftarrow 0 = {}^{-}8 + \text{ك}'(1) \Leftarrow \text{ك}'(1) = 8$

$\text{ق}''(\text{س}) = 12\text{س}^2 - 24\text{س} + \text{ك}''(\text{س})$

$\text{ق}''(1) = 12 - 24 + \text{ك}''(\text{س}) \Leftarrow 0 = {}^{-}12 + \text{ك}''(1) \leftarrow \text{ك}''(1) = 12$

$\text{ع}(\text{س}) = \text{ك}^2(\text{س})$

$\text{ع}'(\text{س}) = 2\text{ك}(\text{س}) \times \text{ك}'(\text{س})$

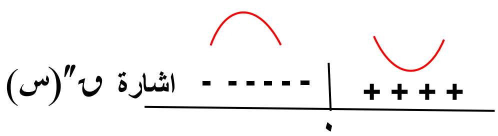
$\text{ع}''(\text{س}) = 2\text{ك}(\text{س}) \times \text{ك}''(\text{س}) + 2\left(\text{ك}'(\text{س})\right)^2$

$\text{ع}''(1) = 2\text{ك}(1) \times \text{ك}''(1) + 2\left(\text{ك}'(1)\right)^2$

$= 2\times 5\times 12 + 2(8)^2 = 120 + 128 = 248$

السؤال الثامن: المعطيات: $\text{ق}(0)=0 ،\ \text{ق}'(1) = 0 ،\ \text{ق}'({}^{-}2) = 0$

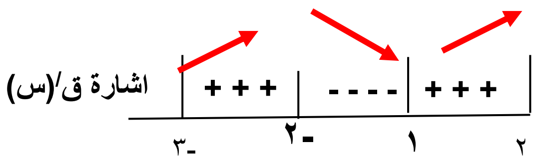
ب) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س=١ ،س=-٢ بحيث ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(-٢) قيمة عظمى محلية (ظهر ذلك من خلال اختبار المشتقة الثانية) اما ق(-٣) قيمة صغرى محلية ، ق(٢) قيمة عظمى محلية (يظهر ذلك من خلال إشارة المشتقة الاولي لان اختبار المشتقة الثانية يفشل).



ج) للاقتران نقطة انعطاف عند س=٠ هي (٠،٠) ، ق متصل عندها ويغير من مجال تقعره

أ) ق(س) متزايد $[-3 ، -2]$

كذلك في $[1 ، 2]$ **ومتناقص في** $[{}^{-}2 ، 1]$



تمارين (٢-٥) تطبيقات القيم القصوى صفحة ٨٧

السؤال الأول :

الحل : محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٨٠=٢س+٢ص

٤٠=س+ص ومنها ص= ٤٠- س

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م= س × ص

م= س(٤٠ – س)   ٠<س<٤٠

م= ٤٠س- $\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = ٤٠ - ٢\text{س}$

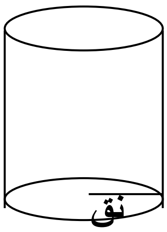
صفر = ٤٠- ٢س ومنها س= ٢٠

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءس}^{٢}} = ^{-}٢ \Leftarrow \left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءس}^{٢}}\right|_{\text{س}=٢٠} = ^{-}٢ < ٠$

إذن المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ٢٠ م ومنها ص= ٢٠ م

ومنها مساحة اكبر حديقة ٤٠٠ متر مربع

السؤال الثاني :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$١٩٢\pi = \text{نق}^{٢}\pi \times \text{ع} \Leftarrow \text{ع} = \frac{١٩٢}{\text{نق}^{٢}}$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (لأنها مفتوحة من أعلى)

$\text{م} = ٢\,\text{نق}\,\pi \times \text{ع} + \text{نق}^{٢}\,\pi$

التكلفة ت $= ٢\,\text{نق}\,\pi\,\text{ع ل} + \text{نق}^{٢}\,\pi \times ٣\text{ل}$ ، بفرض أن اسم^{٢} من الجوانب يكلّف ل إذن اسم^{٢} من القاعدة يكلف ٣ ل

$\text{ت} = ٢\pi\text{ل} \times \text{نق ع} + ٣\pi\text{ل نق}^{٢}$

$\text{ت} = ٢\pi\text{ل} \times \text{نق} \frac{١٩٢}{\text{نق}^{٢}} + ٣\pi\text{ل نق}^{٢}$

$\text{ت} = ٣٨٤\text{ل}\pi \times \frac{١}{\text{نق}} + ٣\pi\text{ل} \times \text{نق}^{٢}$ ، نق>٠

$\frac{\text{ءت}}{\text{ءنق}} = ٣٨٤\text{ل}\pi \times \frac{^{-}١}{\text{نق}^{٢}} + ٣\pi\text{ل} \times ٢\,\text{نق} = \frac{^{-}٣٨٤\pi\text{ل}}{\text{نق}^{٢}} + ٦\pi\text{ل نق}$

$$\frac{-٣٨٤\,\pi\,\text{ل}}{\text{نق}^{٢}}+٦\,\pi\,\text{ل نق}=٠ \quad \text{ومنها ينتج أن} \quad \frac{٣٨٤\,\pi\,\text{ل}}{\text{نق}^{٢}}=٦\,\pi\,\text{ل نق}$$

$$٦٤=\text{نق}^{٣}\Leftarrow \text{نق}=٤\text{سم}$$

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ت}}{\text{د نق}^{٢}}=-٣٨٤\,\pi \times \frac{-٢\,\text{نق}}{\text{نق}^{٤}}+٦\pi\text{ل}=\frac{٧٦٨\pi\text{ل}}{\text{نق}^{٣}}+٦\pi\text{ل}$$

$$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ت}}{\text{د نق}^{٢}}\right|_{\text{نق}=٢}=١٨\,\pi > ٠ \Leftarrow$$ **التكلفة أقل ما يمكن عندما نق= ٤سم**

$$\text{ع}=\frac{١٩٢}{\text{نق}^{٢}}=\frac{١٩٢}{١٦}=١٢\text{سم}$$

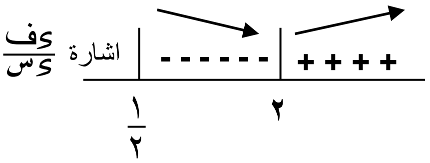
إذن ابعاد الاسطوانة الاقل تكلفة هي نصف قطر القاعدة=٤سم وارتفاعها ١٢سم

السؤال الثالث : $\text{ص}=\text{د}(\text{س})=\sqrt{٢\text{س}-١}$

$$\text{ف}^{٢}=(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-٠)^{٢}=(\text{س}-٣)^{٢}+\text{ص}^{٢}$$

$$\text{ف}^{٢}=(\text{س}-٣)^{٢}+٢\text{س}-١ \;،\; \text{س}\geq\frac{١}{٢}$$

$$٢\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دس}}=٢(\text{س}-٣)+٢ \;،\; \text{س}>\frac{١}{٢}$$



$$\frac{\text{دف}}{\text{دس}}=\frac{\text{س}-٢}{\text{ف}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دس}}=٠ \leftarrow \frac{\text{س}-٢}{\text{ف}}=٠ \leftarrow \text{س}-٢=٠ \leftarrow \text{س}=٢$$

المسافة اقل ما يمكن عندما $\text{س}=٢ \leftarrow \text{ص}=\sqrt{٣} \leftarrow \text{و}=(٢،\sqrt{٣})$

السؤال الرابع :

$$\text{ف}=\text{اجتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}+\text{ب جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}}=\frac{\text{ف}(٢)-\text{ف}(٠)}{٢-٠}$

$$١٠ = \frac{\left(\text{أ جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ب جا}\frac{\pi}{٢}\right) - \left(\text{أ جتا}(٠) + \text{ب جا}(٠)\right)}{٢}$$

$$٢٠ = \text{ب} - \text{أ} \quad \text{------------} \quad (١)$$

$$\text{ع} = \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{أ} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤} + \text{ب} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ع} = \frac{{}^{-}\text{أ}\pi}{٤} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + \frac{\text{ب}\pi}{٤}\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

سرعة الجسم اقل ما يمكن عند $\text{ن} = ١ \leftarrow \text{ع}'(١) = ٠$

$$\text{ع}'(\text{ن}) = \frac{{}^{-}\text{أ}\pi}{٤} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤} + \frac{\text{ب}\pi}{٤} \times {}^{-}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ع}'(\text{ن}) = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + {}^{-}\text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

$$\text{ع}'(١) = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤} + {}^{-}\text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٤}$$

$$٠ = {}^{-}\text{أ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \text{ب}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

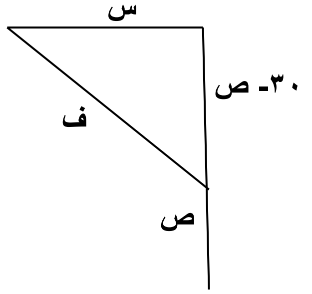
$$٠ = {}^{-}\text{أ} - \text{ب} \leftarrow \text{أ} = {}^{-}\text{ب} \quad \text{------------} \quad (٢)$$

نعوض قيمة أ من ٢ في ١

$$٢٠ = \text{ب} - \left({}^{-}\text{ب}\right) \leftarrow ٢٠ = ٢\text{ب} \leftarrow \text{ب} = ١٠$$

$$٢٠ = \text{ب} - \text{أ} \leftarrow ٢٠ = ١٠ - \text{أ} \leftarrow \text{أ} = {}^{-}١٠$$

السؤال الخامس:



$$\text{ف}^{٢} = (٣٠ - \text{ص})^{٢} + \text{س}^{٢}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ١٠ \leftarrow \text{س} = ١٠\text{ن} \text{ ، } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢٠ \leftarrow \text{ص} = ٢٠\text{ن}$$

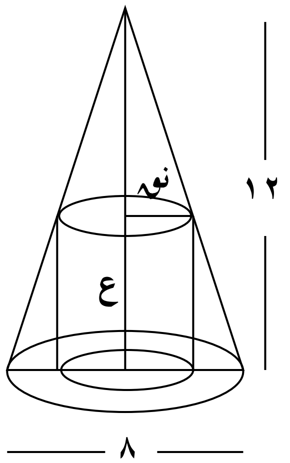
$$\text{ف}^{٢} = (٣٠ - ٢٠\text{ن})^{٢} + (١٠\text{ن})^{٢}$$

$$٢\text{ف}\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢(٣٠ - ٢٠\text{ن}) \times {}^{-}٢٠ + ٢(١٠\text{ن}) \times ١٠$$

$$\text{ف}\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = {}^{-}\text{٦٠٠} + \text{٤٠٠ن} + \text{١٠٠ن} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{{}^{-}\text{٦٠٠} + \text{٥٠٠ن}}{\text{ف}}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{٠} \Leftarrow \text{ن} = \frac{\text{٦٠٠}}{\text{٥٠٠}} = \frac{\text{٦}}{\text{٥}} = \text{١,٢}$$ **ساعة = ساعة و ١٢ دقيقة**

المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة



السؤال السادس:

حجم الاسطوانة = $\text{نق}^{\text{٢}} \times \pi \times \text{ع}$

من تشابه المثلثات

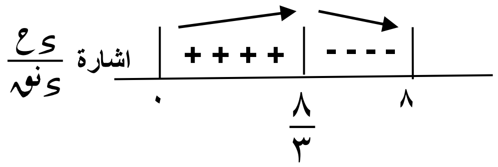
$$\frac{\text{نق}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٢} - \text{ع}}{\text{١٢}} \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = \frac{\text{١٢} - \text{ع}}{\text{٣}}$$

$$\text{ع} = \text{١٢} - \text{٣نق}$$

$$\text{ع} = \pi\,\text{نق}^{\text{٢}}\left(\text{١٢} - \text{٣نق}\right) \quad ، \quad \text{٠} < \text{نق} < \text{٤}$$

$$\text{ع} = \text{١٢}\pi\,\text{نق}^{\text{٢}} - \text{٣}\pi\,\text{نق}^{\text{٣}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دنق}} = \text{٢٤}\pi\,\text{نق} - \text{٩}\pi\,\text{نق}^{\text{٢}}$$

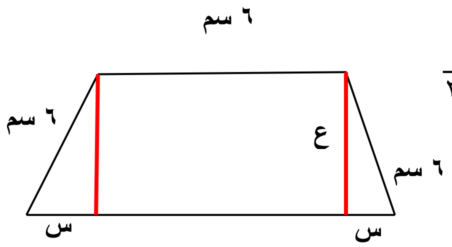


$$\text{٠} = \text{٣}\pi\,\text{نق}\left(\text{٨} - \text{٣نق}\right) \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = \text{٠} \quad \text{ترفض أو} \quad \text{نق} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}} \quad \text{سم}$$

إذن الحجم أكبر ما يمكن عندما $\text{نق} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ فيكون أكبر حجم= $\pi\left(\frac{\text{٦٤}}{\text{٩}}\right)\left(\text{١٢} - \text{٣} \times \frac{\text{٨}}{\text{٣}}\right)$

$$= \pi\left(\frac{\text{٦٤}}{\text{٩}}\right)(\text{٤}) = \frac{\text{٢٥٦}\pi}{\text{٩}} \ \text{سم}^{\text{٣}}$$

السؤال السابع :

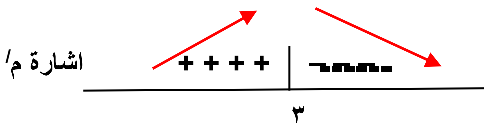


مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{٢س} + \text{٦} + \text{٦})\text{ع}$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}$

$$\text{م} = (\text{س} + \text{٦})\sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}$$

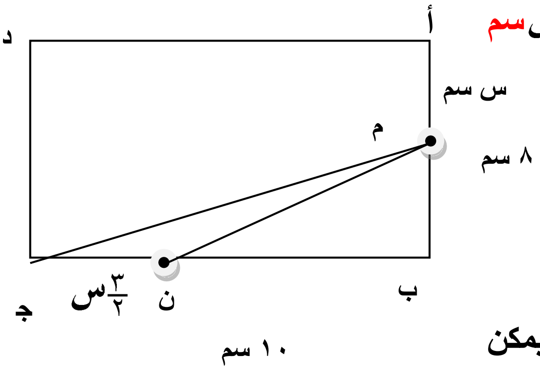
$$\text{م}' = \sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}} + (\text{س} + \text{٦}) \times \frac{-\text{٢س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣٦} - \text{س}^{\text{٢}}}}$$

$$م' = \frac{-٢س^٢ - ٦س + ٣٦}{\sqrt{٣٦ - س^٢}} = ٠$$
$$-٢س^٢ - ٦س + ٣٦ = ٠$$
$$(س+٦)(س-٣) = ٠$$
$$س = -٦ ، ٣$$



عندما س= ٣ يوجد قيمة عظمى وتكون اكبر مساحة ممكنة $=٢٧\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الثامن : نفرض أم $=$ س سم ، فيكون م ب $=٨-$س سم



$$م = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٢}س(٨-س)\right)$$
$$م = \frac{١}{٢}\left(١٢س - \frac{٣}{٢}س^٢\right)$$
$$م' = \frac{١}{٢}(١٢ - ٣س) = ٠$$ ومنها س=٤

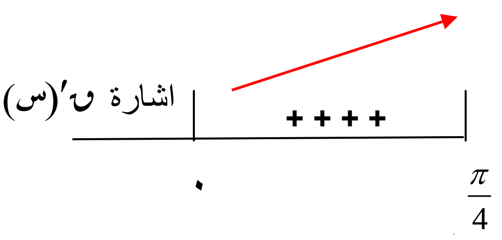
يوجد عندما س=٤ قيمة عظمى تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تمارين عامة (الوحدة الثانية) صفحة ٨٨

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الإجابة	جـ	ب	ب	ب	د	جـ	ا	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

السؤال الثاني :



$$ق'(س) = ن'(س) = جتاس - جاس = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$$

نلاحظ ان $ق'(س) > ٠ \ \forall س \in \left]٠ ، \frac{\pi}{٤}\right[$

ومنها ق(س) متزايد على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$

السؤال الثالث:

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٣} \leftarrow \text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣ - (\text{س} + ١) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣ - (\text{س} + ١) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}} = \frac{٣ - \text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow (^{-}\text{س} - ٣)(\text{س} - ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = ١ ،\text{س} = {}^{-}٣$$

ق متزايد في الفترة[-٣،١] ومتناقص في]$-\infty$،-٣] و [١،∞[

$\text{ن}(-٣) = \frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية ، $\text{ن}(١) = \frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

السؤال الرابع :

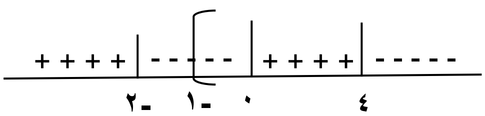
$\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} - \text{أ}$ يحقق رول $[{}^{-}١،\text{أ}]$ أوجد أ

ق يحقق رول ومنها ق متصل وقابل للاشتقاق على $[{}^{-}١،\text{أ}]$ و $\text{ن}({}^{-}١) = \text{ن}(\text{أ})$

$$\text{ن}({}^{-}١) = ١ + ٣ - \text{أ} = ٤ - \text{أ}$$

$$\text{ن}(\text{أ}) = \text{أ}^{٢} - ٣\text{أ} - \text{أ} = \text{أ}^{٢} - ٤\text{أ}$$

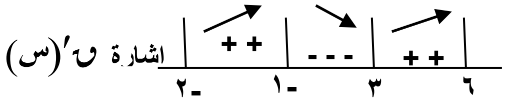
$$\text{ن}({}^{-}١) = \text{ن}(\text{أ}) \Leftarrow (٤ - \text{أ}) = (\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ})$$



$\text{أ}^{٢} - ٣\text{أ} - ٤ = ٠$ ومن أ=٤، أ=-١ **(تهمل)**

السؤال الخامس :

أ) $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ٥$ ، $[{}^{-}٢،٦]$



$$\text{ن}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٩$$

$$٠ = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = (\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)$$

النقط الحرجة عند س= -٢ ، -١ ، ٣، ٦

ق(-٢)= -٨ -٣×٤-٩×-٢+٥= -٨ -١٢+١٨+٥ = ٣

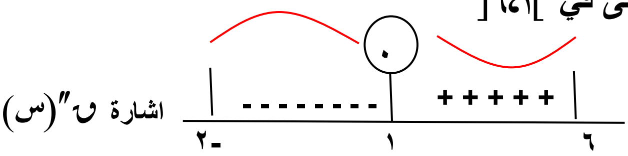
ق(-١) = -١-٣+٩+٥=١٠

ق(٣)= ٢٧-٣×٩-٩×٣+٥=٢٧-٢٧+٥=-٢٢ قيمة صغرى مطلقة

ق(٦)= ٦×٣٦-٣×٣٦-٩×٦+٥=١٠٨-٥٤+٥ =١١٣-٥٤=٥٩ قيمة عظمى مطلقة

ب) $ق''(س) = ٦س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ١$

ق مقعر الى اسفل في]⁻٢،١[ومقعر الى اعلى في]١،٦[



ج) (١، -٦) نقطة انعطاف ،متصل ويغير من تقعره

ظل زاوية الانعطاف = $ق'(١) = {}^{-}١٢$

السؤال السادس:

أ) اشارة $ق''(س)$

منحنى ق(س) مقعر الى اعلى في]⁻∞،⁻٢[كذلك في]١،∞[ومقعر الى اسفل في]⁻٢،١[

ب) للاقتران نقاط انعطاف عند س= -٢ ، س=١ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره

السؤال السابع:

ق كثير حدود معرف على [٢،٦] يقع منحناه في الربع الاول ومنها ق> ٠ في [٢،٦]

ق متناقص على مجاله ومنها $ق' < ٠$ في]٢،٦[

هـ(س) =١- س ومنها هـ < صفر في [٢،٦]

$هـ' = {}^{-}١ < ٠$ في]٢،٦[بين أن ك = ق×هـ متناقص في]٢،٦[

$$(ق \times هـ)'(س) = ق(س).هـ'(س) - هـ(س).ق'(س)$$

اشارة $(ق \times هـ)'(س) =$ موجب×سالب – سالب ×سالب= سالب

إذن ق×هـ متناقص في [٢،٦]

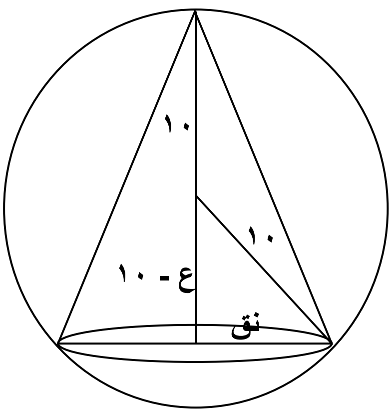
السؤال الثامن:

نق²+(ع-١٠)²=١٠٠ ومنها نق²=١٠٠- (ع²-٢٠ع+١٠٠) اذن نق²=٢٠ع – ع²

$$ع = \frac{\pi}{٣}نق^٢ع = \frac{\pi}{٣}(٢٠ع - ع^٢) \times ع$$

$$\leftarrow ع = \frac{\pi}{٣}(٢٠ع^٢ - ع^٣)$$

$$\frac{ءع}{ءع} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ع - ٣ع^٢) \leftarrow ٠ = \frac{\pi}{٣}ع(٤٠ - ٣ع)$$



ع = ٠ ترفض أو $ع = \frac{٤٠}{٣}$سم

$$\frac{ء^٢ع}{ءع^٢} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ - ٦ع)$$

$$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ح}}{\text{د}\text{ع}^{٢}}\right|_{\text{ع}=\frac{٤٠}{٣}} = \frac{\pi}{٣}\left(٤٠-٦\times\frac{٤٠}{٣}\right) = \frac{\pi}{٣}\times {}^{-}٤٠ < ٠$$

إذن الحجم اكبر ما يمكن عندما $\text{ع} = \frac{٤٠}{٣}$ سم $\text{نق} = \frac{٢٠\sqrt{٢}}{٣}$

السؤال التاسع:

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} - \text{هـ}(\text{س}) + ٣\text{س}$ ، $\text{س} \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

اثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$(\text{ق}+\text{هـ})(\text{س}) = \text{جتاس} + ٣\text{س}$

$(\text{ق}+\text{هـ})'(\text{س}) = {}^{-}\text{جاس} + ٣ > ٠ \quad \forall \text{س} \in \left]٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

لأن $\text{جا}^{+}\text{س} < ١ \Leftarrow {}^{-}\text{جاس} + ٣ > {}^{-}١ + ٣ = ٢$

إذن ق+هـ متزايد في $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

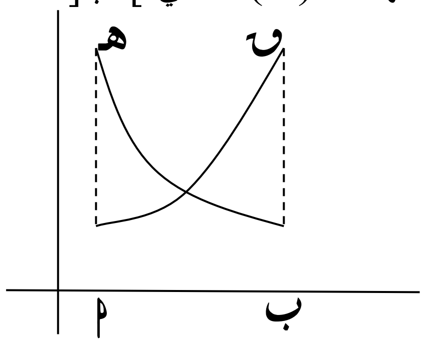
السؤال العاشر:

بين أن $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ **اقتران متزايد على [أ،ب]**

ق>٠ ، هـ >٠ يقعان في الربع الاول

ق متزايد في [أ،ب] ق'(س)>٠ في]أ،ب[، ق مقعر الى أعلى ومنها ق''(س)>٠ في]أ،ب[

هـ متناقص في [أ،ب] ومنها هـ'(س)<٠ في]أ،ب[



$$\left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)' = \frac{\text{هـ}(\text{س})\,\text{ق}''(\text{س}) - \text{ق}'(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})^{٢}}$$

$$\text{اشارة}\left(\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)' = \frac{(+\times+)-(+\times-)}{+} = \text{موجب}$$

إذن $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ **متزايد [أ،ب]**

السؤال الحادي عشر :

$ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د$

$ق(٠) = ٣ \Leftarrow د = ٣$

$ق'(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ$

$ق'(٢) = ٠ \Leftarrow ٣أ \times ٤ + ٠ + جـ + ٣ \Leftarrow ١٢أ + جـ = -٣$

$ق''(س) = ٦أس + ٢ب$

$ق''(٠) = ٢ب = ٠ \Leftarrow ب = ٠$

$ق(٠) = ٣ \Leftarrow د = ٣$

$ق(٢) = {}^{-}١ \Leftarrow ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = {}^{-}١$

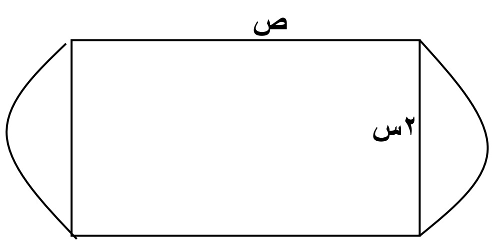
$٨أ + ٢جـ = {}^{-}٤$

$ق'(٢) = ٠ \Leftarrow ٣أ \times ٤ + جـ \Leftarrow ١٢أ + جـ = ٠$

وبحل المعادلتين ينتج ان $أ = \frac{١}{٤}$ ، $جـ = -٣$

$ق(س) = \frac{١}{٤}س^{٣} - ٣س + ٣$

السؤال الثاني عشر :



محيط الدائرة = $٢نق\pi$

= $٢س\pi$

محيط الشكل = $٢ص + ٢س\pi$

$٤٠٠ = ٢ص + ٢س\pi$

$٢٠٠ = ص + س\pi \Leftarrow ص = ٢٠٠ - س\pi$

مساحة المستطيل = $ص + ٢س$

$م = ص + ٢س = ٢س(٢٠٠ - \pi س)$

$م = ٤٠٠س - ٢\pi س^{٢}$

$\frac{دم}{دس} = ٤٠٠ - ٤\pi س \leftarrow \frac{دم}{دس} = ٠ \leftarrow س = \frac{١٠٠}{\pi}م$

$\left.\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}\right|_{س=\frac{١٠٠}{\pi}} = {}^{-}٤\pi < ٠ \leftarrow$ **المساحة اكبر ما يمكن عندما** $س = \frac{١٠٠}{\pi}$

الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

طول المستطيل = $٢٠٠ - \pi \times \frac{١٠٠}{\pi} = ١٠٠م$ **و عرض المستطيل =** $\frac{٢٠٠}{\pi}م$

السؤال الثالث عشر:

محيط المثلث الأول = س **ومنه طول الضلع** = $\frac{س}{٣}$ ، **مساحة المثلث الأول** $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ س^{٢}

محيط المثلث الثاني = ١٨ – س **ومنه طول الضلع** = $\frac{١٨-س}{٣}$ ،

مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ $(١٨-س)^{٢}$

م= مجموع مساحتيهما = $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ س^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ $(١٨-س)^{٢}$

م′ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ س – $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ $(١٨-س)$

م′ = ٠ ⟸ س = ٩

م″ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ > ٠ **س=٩ قيمة صغرى محلية**

محيط المثلث الأول =٩سم ومحيط المثلث الثاني=٩ سم وبالتالي طول ضلع كل من المثلثين =٣ سم

حلول الوحدة الثالثة / المصفوفات
تمارين (٣ – ١) صفحة ٩٨

السؤال الأول:

أ) لتكن مصفوفة الانتاج هي أ = $\begin{bmatrix} ٧٥٠ & ٦٠٠ & ٨٠٠ \\ ٦٥٠ & ٤٥٠ & ٩٠٠ \end{bmatrix}$ **وهي من الرتبة** ٢ × ٣

ب) مجموع مدخلات العمود الثاني يمثل انتاج فرع طولكرم

السؤال الثاني:

١) المصفوفة أ **من الرتبة** ٤ × ٣

٢) أ$_{٣١}$ + أ$_{١٢}$ = –٤ + ٦ = ٢

٣) بما أن (أ$_{٢٣}$)^{٣} = ٢٧ ، **فإن** (–س)^{٣} = ٢٧ **ومنه** س = –٣

السؤال الثالث:

بما أن $\begin{bmatrix} س^{٢}+١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س-١ & ٥ \end{bmatrix}$ **فإن :**

س^{٢} + ١ = ١٠ **ومنها** س = ±٣ ، **وكذلك** س – ١ = ٢ ، **ومنه** س = ٣ ، **أي** س = ٣ **فقط** .

السؤال الرابع

نفرض المصفوفة ب مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ فتكون مدخلاتها على النحو $أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}$ أي أن $ب = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

السؤال الخامس:

$أ = \begin{bmatrix} ٢^- & ٥ & ١ \\ ٦ & ٣^- & ٥ \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ ومدخلاتها على النحو $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ

$$ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٥ & -٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

تدريبات صفحة ١٠٢:

التدريب الأول: أ)

$$ب + ٢أ = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$٣أ - ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & -١١ & ٣ \\ -١ & ٨ & -١٠ \end{bmatrix}$$

ب) $$جـ + د = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} = ٩\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٩م_٢$$

التدريب الثاني:

$$٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_٢$$

ومنها $٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - م_٢ = ٤س$ أي أن $\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٤س$

$$س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

التدريب الثالث:

نفرض ان $أ = \begin{bmatrix} هـ & و \\ ع & ل \end{bmatrix}$ فيكون $\begin{bmatrix} ٢هـ & ٢و \\ ٢ع & ٢ل \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ومنها هـ = -١، و $= \frac{٥}{٢}$، ع $= \frac{-١}{٢}$، ل $= \frac{-٣}{٢}$ أي أن أ $= \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

التدريب الرابع: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

ومنها ص = ٣ ، س = -٦

التدريب الخامس:

س + ٢ص $= \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ٣س − ص $= \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$

س + ٢ص $= \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١١ & -٢ \end{bmatrix}$

٦س − ٢ص $= \begin{bmatrix} -١٠ & ٦ \\ -١٠ & ١٦ \end{bmatrix}$ **وبحل المعادلتين ينتج** ٧س $= \begin{bmatrix} -٧ & ٧ \\ -٢١ & ١٤ \end{bmatrix}$ **أي أن**

س $= \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١٠٧

السؤال الأول:

أ) ب ٥×٤ **ب)** ب ٣×٥

السؤال الثاني: **أ)** أ.ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٧ & ٢٤ & ٤٠ \\ ١١ & -١٢ & -٦ \end{bmatrix}$

ب) جـ . ب $= \begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣٠ & ٦ & -١١ \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix}$

ج) $\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 25 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$

السؤال الثالث:

$$\begin{bmatrix} 3 + 4\text{س} + 25 & 18 + \text{س ص} + 40 \\ 5 & -6 + 4\text{ص} + -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 64 \\ 5 & -34 \end{bmatrix}$$

من تساوي مصفوفتين ينتج أن:

$3 + 4\text{س} + 25 = 20$ ، $-6 + 4\text{ص} + -16 = -34$

$4\text{س} + 28 = 20$ ، $4\text{ص} + -22 = -34$

$4\text{س} = -8$ ، $4\text{ص} = -12$

$\text{س} = -2$ ، $\text{ص} = -3$

السؤال الرابع: $\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 40 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} = 5\text{ص}$$

السؤال الخامس: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، فبيّن أن: $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$

الحل:

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{------(1)}$$

$$(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب}) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{-----(2)}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}+\text{ب})$$

السؤال السادس:

اذا كانت $أ^{2} = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} س^{2} & ٠ \\ س+١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

فإن $س^{2} = ١$ وبالتالي $س = \pm ١$

أو $س + ١ = ٥$ ومنها $س = ٤$

بالتعويض لا توجد أي قيمة لـ س تحقق أن: $أ^{2} = ب$

مجموعة الحل $= \varnothing$

السؤال السابع: $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^{-} \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix}$

أ) نفرض $ء = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$أ + ء = ب \cdot ء \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} ٢ + س \\ ٣^{-} + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$

ومن تساوي مصفوفتين:

$٢ + س = ٣س + ٢ص$ ، $٣^{-} + ص = س$

$س + ص = ١$ ، $-س + ص = ٣$

وبحل المعادلتين بالجمع ينتج أن:

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢$

وبالتعويض $س = -١$ ومنها $ء = \begin{bmatrix} ١^{-} \\ ٢ \end{bmatrix}$

$جـ^{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix}$

ب) $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix} = م \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & ١^{-} \end{bmatrix} = جـ$

تمارين (٣ – ٣) صفحة ١١٣

السؤال الأول : جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ):
$$\begin{vmatrix} ^{-}٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ ^{-}٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = {}^{-}٤\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + {}^{-}٣\begin{vmatrix} ٦ & ١ \\ ^{-}٤ & ٢ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ^{-}٤ & ٣ \end{vmatrix}$$
$$= {}^{-}٢٨ + {}^{-}٤٨ + ٧٦ = ٠$$

ب)
$$\begin{vmatrix} ٢ & ^{-}٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ١٦ + ١٦ = ٣٢$$

حـ)
$$|٥م_{٣}| = ٥^{٣}|م_{٣}| = ١٢٥(١) = ١٢٥$$

السؤال الثاني : بما أن
$$\begin{vmatrix} ٢ & ^{-}١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ^{-}١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$$
$$٢\begin{vmatrix} س & ٥ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - {}^{-}١\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = س^{٢} + ١$$
$$\Leftarrow ٦س - ٦٠ + ٧ + ٧٢ - ٣س = س^{٢} + ١$$
$$س^{٢} - ٣س - ١٨ = ٠$$
$$(س + ٣)(س - ٦) = ٠$$
$$س = ٦ ، {}^{-}٣$$

السؤال الثالث

$$|٣أ| = ٩|أ| = ٥٤ \Leftarrow |أ| = ٦$$
$$|أ.ب| = |أ|.|ب| = {}^{-}١٢$$
$$\Leftarrow ٦|ب| = {}^{-}١٢ \Leftarrow |ب| = {}^{-}٢$$
$$|٢أ| + |٥ب| = ٤|أ| + ٢٥|ب| = ٢٤ + {}^{-}٥٠ = {}^{-}٢٦$$

السؤال الرابع : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{٣}| = ١٢٥$ ، فما قيمة/ قيم س؟

الحل: $|أ^{٣}| = ١٢٥ \Leftarrow |أ|^{٣} = ١٢٥ \Leftarrow |أ| = ٥$

$|أ| = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = س^{٢} - ٤ = ٥$ أي أن $س^{٢} = ٩$ ومنها $س = \pm ٣$

السؤال الخامس : لمعرفة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣،٢)، (٥، ٧).
نقوم بإيجاد المحدد عن طريق مدخلات العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + {}^{-}١\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$١١ - ٧\text{س} + ٥\text{ص} + ٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٠$$

$$\Leftarrow -٥\text{س} + ٢\text{ص} + ١١ = ٠$$

أو

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow \text{س}\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix} + {}^{-}\text{ص}\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\Leftarrow -٥\text{س} + ٢\text{ص} + ١١ = ٠$$

السؤال السادس :

أ) $\begin{vmatrix} ٢ & {}^{-}٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & {}^{-}٤ \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix}$ **ضرب الصف الأول في (-٢) وإضافته للصف الثاني أي -٢ ص$_١$+ص$_٢$**

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ **إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.**

ج) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$ **(تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (-١))**

السؤال السابع :

أ) $\begin{vmatrix} \text{ب+جـ} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ+ب} & \text{جـ} & ١ \\ \text{أ+جـ} & \text{ب} & ١ \end{vmatrix} = ٠$

بجمع العمودين الأول والثاني

$$\xleftarrow{ع_2+ع_1}\begin{vmatrix} ب+ج+أ & أ & ١ \\ أ+ب+ج & ج & ١ \\ أ+ج+ب & ب & ١ \end{vmatrix}$$ **وبأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من $ع_1$ ينتج أن:**

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & ج & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$$ **لأن به $ع_1 = ع_3$**

ب) $$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$$

بما أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي $= ٥ \times {}^{-}٤ \times ١٠ = {}^{-}٢٠٠$

تمارين(٣ ـ ٤) صفحة ١١٩

السؤال لأول $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & {}^{-}٨ \end{bmatrix}$ **:** $|أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ \neq ٠$ **لها نظير ضربي.**

$ب = \begin{bmatrix} جاس & ٣ \\ {}^{-}١ & ١ \end{bmatrix}$ $|ب| = جاس + ٣ \neq ٠$ **لها نظير ضربي.**

$ج = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ $|ج| = ٩ - ٩ = ٠$ **ليس لها نظير ضربي.**

$د = \begin{bmatrix} ٢ & {}^{-}١ & ٣ \\ ٦ & {}^{-}٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & {}^{-}١ \end{bmatrix}$ $|د| = ٢(٣ - ٦٣) + ١\left({}^{-}٦ - ١٨\right) + ٣(٤٢ + ٦) = {}^{-}١٢٠ - ٢٤ + ١٤٤ = ٠$

ليس لها نظير ضربي.

السؤال الثاني: $أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

بما أن أ مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$|أ| = \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٢ك^{٢} - ٤ك = ٠$

$٢ك(ك - ٢) = ٠ \Leftarrow ك = ٠$ ، **٢**

وبما أن ب مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا. $٠ = \begin{vmatrix} ٤ & ك \\ ك & ١ \end{vmatrix} = |ب|$

$٢\pm = ك \Leftarrow ٠ = ٤ - ك^{٢}$

السؤال الثالث: $\text{،} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = ا$

$$٢ = ٥\times٢ - ٣\times٤ = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = |ا|$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٥-}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}\frac{١}{٢} = ا^{١-}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢} - ٣ = \begin{vmatrix} \frac{٥-}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} = |ا^{١-}|$$

$$ا = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & ٢ \\ \frac{٣}{٢} & ١ \end{bmatrix}٢ = (ا^{١-})^{١-}$$

السؤال الرابع : $\frac{١}{٥} = |ا^{١-}|$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = ا$

$$٥ = |ا| \Leftarrow \frac{١}{|ا^{١-}|} = |ا|$$

٣ س – ١٠ = ٥ ⇐ ٣ س = ١٥ ⇐ س = ٥

السؤال الخامس: $\begin{bmatrix} ٣^{-} & س \\ ص & ١ \end{bmatrix} = ا$ ، $|ا| = |ا^{١-}|$

بما أن: $١ = |ا^{١-}|\times|ا| \Leftarrow \frac{١}{|ا^{١-}|} = |ا|$

لكن $١ = |ا|^{٢} \Leftarrow ١ = |ا|.|ا| \Leftarrow |ا^{١-}| = |ا|$

بما أن: $٣ + س ص = |ا|$ إذن $١ = (٣ + س ص)^{٢}$

إما $٢^{-} = س ص \Leftarrow ١ = ٣ + س ص$

أو $٤^{-} = س ص \Leftarrow ١^{-} = ٣ + س ص$

السؤال السادس : $\text{أ} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ، $\text{أ.جـ} = \text{ب}$.

$$|\text{أ}| = 1\times2 - 4\times3 = -10 \neq 0$$

الحل:

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$\text{أ.جـ} = \text{ب} \Leftarrow$ أ غير منفردة

$$\text{أ}^{-1}.\text{أ.جـ} = \text{أ}^{-1}.\text{ب}$$

$$\text{م}_2.\text{جـ} = \text{أ}^{-1}.\text{ب}$$

$$\text{جـ} = \text{أ}^{-1}.\text{ب}$$

$$\text{جـ}^{-1} = \left(\text{أ}^{-1}.\text{ب}\right)^{-1} = \text{ب}^{-1}.\text{أ}$$

$$\text{جـ}^{-1} = \text{ب}^{-1}.\text{أ} = \begin{bmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & -6\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

السؤال السابع : بما أن $\text{أ.ب} = \text{أ.جـ}$ ، بما أن أ غير منفردة ، فإن أ^{-1} موجودة

$$\text{أ.ب} = \text{أ.جـ} \Leftarrow \text{أ}^{-1}.\text{أ.ب} = \text{أ}^{-1}.\text{أ.جـ}$$

$$\text{م.ب} = \text{م.جـ} \Leftarrow \text{ب} = \text{جـ}$$

تمارين (٣ – ٥) صفحة ١٢٥

السؤال الأول

أ) $\text{س} - \text{ص} = 3$

$2\text{س} + \text{ص} = 6$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = 1\times1 - 2\times(-1) = 3 \neq 0$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

ومنها س=٣، ص = ٠

ب) $\text{س} + \text{ص} = 2$ ، $10\text{س} + \text{ص} = 11$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix} = -٩$ **فتكون** $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{١٠}{٩} & \frac{-١}{٩} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ ومنه $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$

السؤال الثاني :

أ) $\text{س} - \text{ص} = ٥$

$\text{س} + ٢\text{ص} = ٢$

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}| = ٢ + ١ = ٣$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢ = ١٢$

$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ٥ = -٣$

$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٢}{٣} = ٤$ ، $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ب) $\text{س} + \text{ص} = -٣$ ،

$٢\text{ص} + \text{س} = -٢$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٤$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ١$

$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٤}{١} = -٤$ ، $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١}{١} = ١$

السؤال الثالث : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$ ،

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -١$ ، $|أ_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤$ ، $|أ_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} = -١$

$\text{س} = \dfrac{|أ_{\text{س}}|}{|أ|} = \dfrac{-٤}{-١} = ٤$ ، $\text{ص} = \dfrac{|أ_{\text{ص}}|}{|أ|} = \dfrac{-١}{-١} = ١$

السؤال الرابع :

أ) $٣\text{س} - \text{ص} = ١$ ، $\text{س} + ٢\text{ص} = ٥$

المصفوفة الممتدة للنظام هي $\bar{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات على النحو الآتي:**

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{١}{٣}\text{ص}_١} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{ص}_١+\text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{٧}{٣} & \frac{١٤}{٣} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{٣}{٧}\text{ص}_٢} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون $\text{ص} = ٢$ ، **وبالتعويض العكسي** $\text{س} - \frac{١}{٣}(٢) = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{س} = ١$

ب) $\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ٦$ ، $\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٣$ ، $٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = ٠$

نكون المصفوفة الممتدة $\bar{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right] \xrightarrow[-٢\text{ص}_١+\text{ص}_٣]{-\text{ص}_١+\text{ص}_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{١}{٣}\text{ص}_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right] \xrightarrow{-٣\text{ص}_٢+\text{ص}_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & -٣ & -٩ \end{array}\right]$$

ومنها -٣ ع=-٩ ومنها ع= ٣
وبالتعويض العكسي: ص=-١
س+ ١+٣ =٦ ومنها س =٢

تمارين عامة(الوحدة الثالثة) صفحة ١٢٦

السؤال الأول (الموضوعي)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	ء	أ	ب	ء	ب	ء	أ

السؤال الثاني:

بما أن $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ^-١ & ص \\ ^-٤ & س \end{vmatrix} = ٧$ ، فإن

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٢س - ص = ٧$$

$$\begin{vmatrix} ^-١ & ص \\ ^-٤ & س \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow -س + ٤ص = ٧$$

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن:
س=٥، ص=٣

السؤال الثالث : $أ = \begin{bmatrix} ^-٣ & ٥ \\ ^-٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$$|أ| = ^-١٢ + ١٠ = ^-٢ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{^-٢} \begin{bmatrix} ٤ & ^-٥ \\ ٢ & ^-٣ \end{bmatrix}$$

أ) $|أ|.أ^{-١} = ^-٢ . \frac{١}{^-٢} \begin{bmatrix} ٤ & ^-٥ \\ ٢ & ^-٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ^-٥ \\ ٢ & ^-٣ \end{bmatrix}$

ب) $|٣أ| = ٩|أ| = ٩ \times ^-٢ = ^-١٨$

جـ) $(-٢\text{أ})^{-١} = \frac{١}{-٢}\,\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢}\cdot\frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{-٥}{٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{-٣}{٤} \end{bmatrix}$

السؤال الرابع : لإيجاد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & ٢ \\ \text{س} & ٣ & \text{س} \\ ٤ & \text{س} & ٥ \end{vmatrix} = -٩$.

فإن : $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & ٢ \\ \text{س} & ٣ & \text{س} \\ ٤ & \text{س} & ٥ \end{vmatrix} = -٩ \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ \text{س} & ٥ \end{vmatrix} + -\text{س}\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٤ & \text{س} \end{vmatrix} = -٩$

$\Leftarrow ١٥ - \text{س}^٢ - \text{س}(\text{س}) + ٢(\text{س}^٢ - ١٢) = -٩$

$\Leftarrow ١٥ - \text{س}^٢ - \text{س}^٢ + ٢\text{س}^٢ - ٢٤ = -٩$

إذن ـ٩ = ـ٩ وهذا يعني أن: س هي أي عدد حقيقي.

السؤال الخامس :

أ) لحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

فإن :

$|\text{أ}| = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{-٢} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{-٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$

ومنها س= ـ٥، ص = ٤

ب) لحل المعادلة المصفوفية

$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

فإن:

$$[\text{س} \quad \text{ص}] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٣^- & ٩ \\ ٤^- & ٠ & ٨^- \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$[٣\text{س} - ٤\text{ص} \quad -٣\text{س} \quad ٩\text{س} - ٨\text{ص}] = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$-٣\text{س} = -٣ \Leftarrow \text{س} = ١$$

$$٣\text{س} - ٤\text{ص} = ٤ \Leftarrow ٣ - ٤\text{ص} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = \frac{١^-}{٤}$$

السؤال السادس : $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & \text{ص} \\ ٥^- & ٤ \end{bmatrix}$

بما أن: $\text{أ}.\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & \text{ص} \\ ٥^- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤\text{س} - ١٥ & \text{س ص} + ١٢ \\ ٠ & ٥\text{ص} + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $٤\text{س} - ١٥ = ١ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$٥\text{ص} + ١٦ = ١ \Leftarrow \text{ص} = -٣$

السؤال السابع : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و}$ ،

نفرض أن : كلا من المصفوفتين لها نظير ضربي وليكن $\text{أ}^{-١}$ ، $\text{ب}^{-١}$

بما أن : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و} \Leftarrow \text{أ}^{-١}(\text{أ}.\text{ب}) = \text{أ}^{-١}.\text{و} = \text{و}$

أي أن $(\text{أ}^{-١}.\text{أ}).\text{ب} = \text{م}.\text{ب} = \text{و}$

كما أن $(\text{أ}.\text{ب}).\text{ب}^{-١} = \text{و}.\text{ب}^{-١} = \text{و}$ ونستنتج أن $\text{أ} = \text{و}$

وهذا يناقض الفرض بأن إحدى المصفوفتين على الأقل منفردة .

السؤال الثامن :

أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ن} & ١^- \\ \text{ك} & ١ \end{bmatrix}$ ، $\Leftarrow |\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١^- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} \text{ن} & ٥ \\ \text{ك} & ٣ \end{vmatrix}$

ومنها $\text{ن} = ٦$ ، $\text{ك} = ٢ \Leftarrow |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٦ & ١^- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨$

ب) $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{8}{8} = 1$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{8}{8} = 1$

السؤال التاسع :

$$|أ^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \Leftarrow أ = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$أ^{2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|أ^{2}| = 33 - 32 = 1 \Leftarrow (أ^{2})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(أ^{-1})^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

ألاحظ أن: $(أ^{2})^{-1} = (أ^{-1})^{2}$

السؤال العاشر : لحل المعادلتين بطريقة كريمر : ٣س+ ٢ ص= ـ ٤ ، ٥ ص + س = ٣ (نرتب أولا)

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = 15 - 2 = 13$$

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26 \qquad س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-26}{13} = -2$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13 \quad ، \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{13}{13} = 1$$

السؤال الحادي عشر : لحل النظام الآتي بطريقة جاوس :

$$س - ص + 4ع = 9 \quad ، \quad 2س + 3ص + 2ع = 2 \quad ، \quad 3ص + س - ع = -4$$

نكون المصفوفة ال ممتدة $\hat{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^- & ١ \\ ١٦^- & ٦^- & ٥ & ٠ \\ ١٣^- & ٥^- & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{−ص١+ص٣}]{\text{−٢ص١+ص٢}} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^- & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤^- & ١^- & ٣ & ١ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & ١^- & ١ \\ \frac{١٦^-}{٥} & \frac{٦^-}{٥} & ١ & ٠ \\ ١٣^- & ٥^- & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٥}\text{ص٢}}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{٢٩}{٥} & \frac{١٤}{٥} & ٠ & ١ \\ \frac{١٦^-}{٥} & \frac{٦^-}{٥} & ١ & ٠ \\ \frac{١^-}{٥} & \frac{١^-}{٥} & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[\text{−٤ص٢+ص٣}]{\text{ص٢+ص١}}$$

ومنها $\frac{١^-}{٥}$ع $= \frac{١^-}{٥}$ ومنها ع $= ١$

وبالتعويض العكسي: ص + $\frac{٦^-}{٥}$ ع $= \frac{١٦^-}{٥} \Leftarrow$ ص $= -٢$

س+ $\frac{١٤}{٥}$ ع $= \frac{٢٩}{٥} \Leftarrow$ س $=٣$

السؤال الثاني عشر : $\left|\begin{array}{ccc} ١١ & ٢ & س \\ ٩ & -٤ & ٠ \\ \frac{١}{٢}س & ٠ & ٠ \end{array}\right| = -٥٠$

حسب خصائص المحددات فإن محدد المصفوفة القطرية العلوية يساوي حاصل ضرب مدخلات القطر الرئيسي أي أن س $\times -٤ \times \frac{١}{٢}$س $= -٥٠$ ومنها س$^{٢} = ٢٥$ أي أن س $= \pm ٥$

اجابات الفصل الثاني

الفرع العلمي والصناعي

حلول الوحدة الرابعة

تمارين ومسائل (٤-١) صفحة ١٣٦

السؤال الاول

ا) $\text{م}(\text{س}) = \frac{١}{٣}(٢+\text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{٢+\text{س}^{٢}}$

$$\text{م}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}(٢+\text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}(٢\text{س}) = \text{س}\sqrt{٢+\text{س}^{٢}} = \text{ق}(\text{س})$$

أي أن $\text{م}(\text{س})$ اقتران أصلي للاقتران $\text{ق}(\text{س})$

ب) $\text{م}(\text{س}) = \text{قا}^{٣}\text{س}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$

$$\text{م}'(\text{س}) = ٣\text{قا}^{٢}\text{س قاس ظاس} = ٣\text{قا}^{٣}\text{س ظاس} \neq \text{ق}(\text{س})$$

أي أن $\text{م}(\text{س})$ ليس اقترانا أصليا للاقتران $\text{ق}(\text{س})$

ج) $\text{م}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}\right)$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

$$\text{م}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}^{٣} + \text{هـ}^{٢\text{س}}} = \text{ق}(\text{س})$$

أي أن $\text{م}(\text{س})$ اقتران أصلي للاقتران $\text{ق}(\text{س})$

السؤال الثاني:

بما أن $\text{م}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ اقترانين أصليين فإن $\text{م}(٣) - \text{هـ}(٣) = \text{جـ}$

ومنها $\text{م}(٣) - \text{هـ}(٣) = ٣ - ٤ = -١ = \text{جـ}$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦ - {}^{-}١ = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧$$

$$\text{هـ}(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$$

السؤال الثالث:

$$(٣\text{م} - \text{هـ})'(٤) = ٣\text{م}'(٤) - \text{هـ}'(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$$

لأن $\text{م}'(٤) = \text{هـ}'(٤) = \text{ق}(٤) = ٧$ حيث $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ٤$

السؤال الرابع:

بما أن $\text{م}(\text{س})$ هو احد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل $\text{ق}(\text{س})$ فإن $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

$$\text{م}'(\text{س}) = ٢(\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قاس ظاس})$$

$$= ٢(\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قاس ظاس}) = ٢\left(\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢\left(\frac{١-\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\right)$$

$$= ٢\left(\frac{١-\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢\left(\frac{١-\text{جاس}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢\left(\frac{١-\text{جاس}}{(١+\text{جاس})(١-\text{جاس})}\right) = \frac{٢}{(١+\text{جاس})} = \text{ق}(\text{س})$$

ومنها يكون $\text{أ} = ٢$

السؤال الخامس:

$\int$ ق(س) ءس = ﺃ س^3 + جـ س وباشتقاق الطرفين ينتج ق(س) = ٣ﺃ س^2 + جـ

بما أن ق(−١) = ٤ فإن ٣ﺃ + جـ = ٤ ....(١)

كذلك ق$'$(س) = ٦ﺃ س ، وبما أن ق$'$(٢) = ٢٤ فإن ١٢ﺃ = ٢٤ ....(٢)

وبحل المعادلتين ينتج أن ﺃ = ٢ ، جـ = −٢

تمارين ومسائل (٤-٢) صفحة ١٤٠

السؤال الأول

أ) $\int$ ٨ءس = ٨س + جـ

ب) $\int$ (٧س^2 − ٤س + $\frac{٣}{س^٤}$) ءس = $\int$ (٧س^2 − ٤س + ٣س$^{-٤}$) ءس

$= \frac{٧}{٣}$ س^3 − ٢س^2 + $\frac{−١}{س^٣}$ + جـ

ج) $\int$ (٣ + س) $\sqrt{س}$ ءس = $\int$ (٣س$^{\frac{١}{٢}}$ + س$^{\frac{٣}{٢}}$) ءس = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

د) $\int$ (٥س + قاس ظاس) ءس = $\frac{٥}{٢}$ س^2 + قاس + جـ

هـ) $\int \frac{س − ١}{\sqrt[٣]{س} − ١}$ ءس = $\int \frac{(\sqrt[٣]{س} − ١)(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١)}{\sqrt[٣]{س} − ١}$ ءس

$= \frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ + س + جـ

و) $\int \frac{٢س^٣ + ٥س^٢ − ١}{س^٢}$ ءس = $\int$ (٢س + ٥ − س$^{-٢}$) ءس = س^2 + ٥س + $\frac{١}{س}$ + جـ

ز) $\int \frac{١}{جتا^٢ س}$ ءس = $\int$ قا^{2}س ءس = ظاس + جـ

حـ) $\int$ (٥هـ^س + $\frac{٢}{س}$) ءس = $\int$ (٥هـ^س + $\frac{٢}{س}$) ءس = ٥هـ^س + ٢لـوهـ |س| + جـ

السؤال الثاني:

بتكامل الطرفين $\int$ (ن$'$(س) + هـ^س) ءس = $\int$ جتاس ءس

ومنها ن(س) + هـ^س = جاس + جـ أي أن ن(س) = جاس − هـ^س + جـ

وبما أن ن(٠) = −١ فإن جـ = ٠ ومنها ن(س) = جاس − هـ^س

السؤال الثالث:

$\int$ ق(س) ءس = جاس − جتاس + ٢ **وباشتقاق الطرفين ينتج أن:**

ق(س) = جتاس + جاس **ومنها** ق′(س) = −جاس + جتاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) − ق′($\frac{\pi}{٢}$) = (جتا$\frac{\pi}{٢}$ + جا$\frac{\pi}{٢}$) − (−جا$\frac{\pi}{٢}$ + جتا$\frac{\pi}{٢}$) = ٢ **وهو المطلوب.**

السؤال الرابع:

بما أن $\int$ (ق′(س) + س^{٢}) ءس = ٢س^{٣} + جس^{٢} + ٢ **فإن**

ق(س) + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + جـ$_{١}$ = ٢س^{٣} + جس^{٢} + ٢

ق(س) = $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} + جس^{٢} + ٢ − جـ$_{١}$

ق′(س) = ٥س^{٢} + ٢جس

ق′(١) = ٥ + ٢جـ = ٤ **ومنها** جـ = $\frac{-١}{٢}$

ق(س) = $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢ − جـ$_{١}$

لكن ق(٢) = $\frac{٤٠}{٣}$ − ٢ + ٢ − جـ$_{١}$ = ٦ **ومنها** جـ$_{١}$ = $\frac{٢٢}{٣}$

فيكون ق(س) = $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١٦}{٣}$ ، ق(−١) = $\frac{-٥}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{-١٥}{٢}$

تمارين ومسائل (٤-٣) صفحة ١٤٥

السؤال الأول:

ميل المماس = ق′(س) = س(٣س − ٢) = ٣س^{٢} − ٢س

$\int$ ق′(س) ءس = $\int$ (٣س^{٢} − ٢س) ءس **ومنها**

ق(س) = س^{٣} − س^{٢} + جـ ، **لكن** ق(٢) = ٥ **فيكون** ٥ = ٨ − ٤ + جـ **ومنها** جـ = ١

فيصبح ق(س) = س^{٣} − س^{٢} + ١

السؤال الثاني:

بما أن س + ص = ٤ هو مماس لمنحنى ق(س) **عندما س = ١ فإن** ق′(١) = −١ **(ميل المماس)**

أي أن أ − ٣ = −١ **ومنها** أ = ٢ **فيصبح** هـ′(س) = ٢س − ٣س^{٢}

$\int$ هـ′(س) = $\int$ (٢س − ٣س^{٢}) ءس **ومنها** هـ(س) = س^{٢} − س^{٣} + جـ

لكن نقطة التماس هي (١،٣) ومنها هـ(س) = س^{٢} − س^{٣} + ٣

السؤال الثالث:

ميل المماس $= \text{ق}'(\text{س}) = ٢\sqrt{\text{أ}}\,\text{س}$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int ٢\sqrt{\text{أ}}\,\text{س}\,\text{دس}$ **ومنها** $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{أ}}\,\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

وبما أن $\text{ق}(٠) = ٠$ **فإن** $\text{جـ} = ٠$ ، **كما أن** $\text{ق}(١) = ٢$ **فإن** $٢ = \sqrt{\text{أ}}$ **أي أن** $\text{أ} = ٤$

فيصبح $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢}$

السؤال الرابع:

$\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{جتاس}\,\text{دس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

وبما أن $\text{ق}'(\pi) = ٢$ **فإن** $\text{جـ} = ٢$ **وتصبح** $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جاس} + ٢$

كما أن $\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (\text{جاس} + ٢)\,\text{دس} = -\text{جتاس} + ٢\text{س} + \text{د}$

لكن $\text{ق}(\pi) = ١$ **فيكون** $\text{ق}(\pi) = ١ + ٢\pi + \text{د} = ١$ **ومنها** $\text{د} = -٢\pi$ **فيكون**

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{جتاس} + ٢\text{س} - ٢\pi$

السؤال الخامس:

$\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{ن}$ **ومنها** $\int \text{دع} = \int \text{ن}\,\text{دن}$

أي أن $\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + \text{جـ}$ **وبما أن سرعته الابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإن** $\text{جـ} = ٣$

فيكون $\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + ٣$، **ويكون** $\text{ع}(٥) = \frac{٢٥}{٢} + ٣ = \frac{٣١}{٢}$ **م/ث**

كما أن $\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + ٣$ **ومنها** $\text{دف} = (\frac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + ٣)\text{دن}$ **وبتكامل الطرفين ينتج:**

$\text{ف} = \frac{١}{٦}\text{ن}^{٣} + ٣\text{ن} + \text{د}$ **وبما أن** $\text{ف}(٠) = ٠$ **فيكون** $\text{ف} = \frac{١}{٦}\text{ن}^{٣} + ٣\text{ن}$

$\text{ف}(٥) = \frac{١٢٥}{٦} + ١٥ = \frac{٢١٥}{٦}$ **مترا**

السؤال السادس:ميل المماس $= \text{ق}'(\text{س}) = \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ **ومنها**

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \left(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\right)\text{دس}$

وينتج أن $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$ **وبما أنه يمر بالنقطة** $(١ ، \frac{٢}{٣})$ **فإن :**

$\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} + ٢ + \text{جـ}$، **أي أن** $\text{جـ} = -٢$ **فيكون** $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢$

السؤال السابع:

نفرض ف : ازاحة الجسم عن قمة البرج فيكون $ع = \frac{ءف}{ءن} = -١٠ن + ٤٠$ **ومنها**

$\int ءف = \int (-١٠ن + ٤٠) ءن$

أي أن $ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن + جـ$، **لكن** $ف(٠) = ٠$

فيكون $ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن$ **وعندما** $ف = -٤٥$ **فإن الجسم يصل الأرض ومنها**
$ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن = -٤٥$ **أي أن** $٥ن^٢ - ٤٠ن - ٤٥ = ٠$ **ومنها** $ن = ٩$ **ثانية**

تمارين (٤-٤ أ) صفحة ١٥٠

السؤال الاول:

أ) $\int \frac{٤}{(س+٢)^٥} ءس = \int ٤(س+٢)^{-٥} ءس = -(س+٢)^{-٤} + جـ$

ب) $\int (١-س)جا(س^٢ - ٢س) ءس$

نفرض $ص = (س^٢ - ٢س)$ **فيكون** $ءص = (٢س - ٢)ءس$ **ومنها** $ءس = \frac{ءص}{(٢س - ٢)}$

$\int (١-س)جا(س^٢ - ٢س) ءس = \int (١-س)جاص \frac{ءص}{٢(س - ١)}$

$= \frac{-١}{٢} \int جاص ءص = \frac{١}{٢}جتاص + جـ = \frac{١}{٢}جتا(س^٢ - ٢س) + جـ$

ج) $\int \frac{لـوـ_هـ س}{س} ءس$

نفرض $ص = لـوـ_هـ س$ **ومنها** $ءص = \frac{١}{س}ءس$ ، **أي أن** $سءص = ءس$

$\int \frac{لـوـ_هـ س}{س} ءس = \int \frac{ص}{س} س ءص = \frac{ص^٢}{٢} + جـ = \frac{(لـوـ_هـ س)^٢}{٢} + جـ$

د) $\int (س^٢ + ٢) \sqrt{س + ١} ءس$

نفرض $ص = س + ١$ **فيكون** $ءص = ءس$ **ويكون**

$\int (س^٢ + ٢) \sqrt{س + ١} ءس = \int (ص^٢ - ٢ص + ٣) ص^{\frac{١}{٢}} ءص = \int (ص^{\frac{٥}{٢}} - ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}}) ءص$

$= \frac{٢}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

هـ) $\int (\text{س}+٢)^{٢}(\text{س}-١)^{٦}\,\text{ءس}$

نفرض ص = س − ١ **فيكون** ءص = ءس

$\int (\text{س}+٢)^{٢}(\text{س}-١)^{٦}\,\text{ءس} = \int (\text{ص}+٣)^{٢}\,\text{ص}^{٦}\,\text{ءص}$

$= \int (\text{ص}^{٨}+٦\text{ص}^{٧}+٩\text{ص}^{٦})\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٩}}{٩}+\frac{٦\text{ص}^{٨}}{٨}+\frac{٩\text{ص}^{٧}}{٧}+\text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}-١)^{٩}}{٩}+\frac{٦(\text{س}-١)^{٨}}{٨}+\frac{٩(\text{س}-١)^{٧}}{٧}+\text{جـ}$

و) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\,\text{ءس} = \int (\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\,\text{ءس}$

$= \int (\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})^{٢}\,\text{ءس} = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\,\text{ءس} =$

$= \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\frac{١}{٤}\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\,\text{ءس} = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س})\,\text{ءس}$

$\int (\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}+\frac{١}{٨}\text{جتا}٤\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٣}{٨}\text{س}+\frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س}+\frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\text{س}+\text{جـ}$

ز) $\int \frac{١}{١+\text{جاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{١-\text{جاس}}{(١+\text{جاس})(١-\text{جاس})}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١-\text{جاس}}{(١-\text{جا}^{٢}\text{س})}\,\text{ءس} = \int \frac{١-\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س}-\text{قاس ظاس})\,\text{ءس}$

$= \text{ظاس}-\text{قاس}+\text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}}+(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}\,\text{ءس} =$

$\int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}}(١+\text{هـ}^{\text{س}})}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})}{(١+\text{هـ}^{\text{س}})}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{هـ}^{\text{س}})+\text{جـ}$

السؤال الثاني:

أ) $\int \sqrt{\frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٥}}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}}}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = ١+\frac{١}{\text{س}}$ **فيكون** $-\text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

ومنها $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}(-\text{س}^{٢})\,\text{ءص}$

$= -\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءص} = \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}+\text{جـ} = -\frac{٢}{٣}(١+\frac{١}{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}}+\text{جـ}$

ب) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\text{جا}\frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، **فيكون** $-\text{س}^{٢}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int \frac{1}{س^2} جا\frac{1}{س} ءس = \int \frac{1}{س^2} جاص \times -س^2 ءص = -\int جاص ءص = جتاص + جـ = جتا\frac{1}{س} + جـ$$

ج) $\int (جاس + قتاس)^2 ءس = \int (جا^2 س + 2 + قتا^2 س) ءس = \int جا^2 س ءس + 2س - ظتاس + جـ$

لكن $\int جا^2 س ءس = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا2س) ءس = \frac{1}{2} س - \frac{1}{4} جا2س$

$$\int (جاس + قتاس)^2 ءس = \frac{5}{2} س - \frac{1}{4} جا2س - ظتاس + جـ$$

د) $\int \frac{(س+2)^5}{س^7} ءس = \int \frac{(س+2)^5}{س^5 \times س^2} ءس = \int \frac{(\frac{س+2}{س})^5}{س^2} ءس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^5}{س^2} ءس$

نفرض $ص = 1 + \frac{2}{س}$ **ومنها يكون** $-س^2 ءص = 2ءس$

أي أن $\int \frac{(س+2)^5}{س^7} ءس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^5}{س^2} ءس = \int \frac{ص^5}{س^2} \times \frac{-س^2}{2} ءص$

$$= \frac{-1}{2} \int ص^5 ءص = \frac{-1}{12} ص^6 + جـ = \frac{-1}{12} (1 + \frac{2}{س})^6 + جـ$$

هـ) $\int س^2 (س^7 + س^3)^{\frac{1}{3}} ءس = \int س^2 (س^3 (س^4 + 1))^{\frac{1}{3}} ءس = \int س^3 (س^4 + 1)^{\frac{1}{3}} ءس$

نفرض $ص = 1 + س^4$ **فيكون** $\frac{ءص}{4س^3} = ءس$

ومنها $\int س^2 (س^7 + س^3)^{\frac{1}{3}} ءس = \int س^3 (س^4 + 1)^{\frac{1}{3}} ءس = \frac{1}{4} \int ص^{\frac{1}{3}} ءص = \frac{3}{16} (س^4 + 1)^{\frac{4}{3}} + جـ$

و) $\int ظا^3 س ءس = \int ظاس ظا^2 س ءس = \int ظاس (قا^2 س - 1) ءس = \int ظاس قا^2 س ءس - \int ظاس ءس$

نفرض $ص = ظاس$ **ومنها** $\frac{ءص}{قا^2 س} = ءس$ **فيكون**

$$\int ظا^3 س ءس = \int ظاس قا^2 س ءس - \int ظاس ءس = \int ص ءص - \int ظاس ءس = \frac{ص^2}{2} + لـو_هـ |جتاس| + جـ$$

$$= \frac{ظا^2 س}{2} + لـو_هـ |جتاس| + جـ$$

تمارين (٤ – ٤ ب) صفحة	١٥٤

السؤال الاول:

أ) $\int \text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$

نفرض أن: $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{س ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \dfrac{١}{\text{س}}\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$$\int \text{س لـو}_{\text{هـ}}\text{س ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$$

ب) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س ءس}$

نفرض أن: $\text{ص} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{ظاس}$

$$\int \text{س قا}^{٢}\text{س ءس} = \text{س ظاس} - \int \text{ظاس ءس} = \text{س ظاس} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$$

ج) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)^{٣}\text{ءس} = \int ٣\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ص} = ٣\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \dfrac{٣}{\text{س}+٢}\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{س}$

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)^{٣}\text{ءس} = ٣\text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - \int \frac{٣\text{س}}{\text{س}+٢}\text{ءس}$$

$$= ٣\text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - \int (\frac{٣\text{س}+٦}{\text{س}+٢} - \frac{٦}{\text{س}+٢})\text{ءس}$$

$$= ٣\text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - ٣\int \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٢}\text{ءس} + \int \frac{٦}{\text{س}+٢}\text{ءس}$$

$$= ٣\text{س لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| - ٣\text{س} + ٦\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

د) $\int \text{س جا٢س ءس}$

نفرض أن: $\text{ص} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{جا٢س ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = -\dfrac{١}{٢}\text{جتا٢س}$

$$\int \text{س جا٢س ءس} = -\frac{١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٢}\int \text{جتا٢س ءس} = -\frac{١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٤}\text{جا٢س} + \text{ج}$$

هـ) $\int \text{س}^{٣}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس}$

نكامل بالتعويض بفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$ **ومنها** $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}} = \text{ءس}$

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢} \times \text{س}\,\text{ه}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{ص} - ١) \times \text{ه}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$ **وهنا نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $\text{ن} = \frac{١}{٢}(\text{ص} - ١)$ $\qquad \text{ءع} = \text{ه}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\therefore \text{ءن} = \frac{١}{٢}\text{ءص}$ $\qquad \text{ع} = \text{ه}^{\text{ص}}$

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}(\text{ص} - ١)\text{ه}^{\text{ص}} - \frac{١}{٢}\text{ه}^{\text{ص}} + \text{ج} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١} - \frac{١}{٢}\text{ه}^{\text{س}^{٢}+١} + \text{ج}$$

و) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+١}$ **ومنها** $\text{٢ص ءص} = \text{ءس}$

$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int \text{٢ص جاص ءص}$ **ثم نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $\text{ن} = \text{٢ص}$ $\qquad \text{ءع} = \text{جاص ءص}$

$\therefore \text{ءن} = \text{٢ءص}$ $\qquad \text{ع} = -\text{جتاص}$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int \text{٢ص جاص ءص} = -\text{٢ص جتاص} + \text{٢جاص} + \text{ج}$$

$$= -٢\sqrt{\text{س}+١}\;\text{جتا}\sqrt{\text{س}+١} + \text{٢جا}\sqrt{\text{س}+١} + \text{ج}$$

ز) $\int \frac{\text{٢س ه}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \int \text{٢س ه}^{\text{س}}\,(\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{٢س ه}^{\text{س}}$ $\qquad \text{ءع} = (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = (\text{٢ه}^{\text{س}} + \text{٢س ه}^{\text{س}})\,\text{ءس}$ $\qquad \text{ع} = \frac{-١}{\text{س}+١}$

$$\int \frac{\text{٢س ه}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \int \text{٢س ه}^{\text{س}}\,(\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس} = \frac{-\text{٢س ه}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \int \frac{(\text{٢ه}^{\text{س}} + \text{٢س ه}^{\text{س}})}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{٢س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+\text{١}} + \int \frac{(\text{٢هـ}^{\text{س}} + \text{٢س هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+\text{١}} \text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{٢س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+\text{١}} + \int \frac{\text{٢هـ}^{\text{س}}(\text{١}+\text{س})}{\text{س}+\text{١}} \text{ءس} = \frac{-\text{٢س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+\text{١}} + \text{٢هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

ح) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس جتاس ءس} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءع} = \text{جا٢س ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{ءس}$ ، $\text{ع} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{جتا٢س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس جتاس ءس} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س ءس} = -\frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتا٢س} + \int \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتا٢س ءس}$$

ثم نكامل بالأجزاء مرة أخرى للمقدار $\int \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتا٢س ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءع} = \text{جتا٢س ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{ءس}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{جا٢س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس جتاس ءس} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س ءس} = -\frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٨}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س} - \int \frac{\text{١}}{\text{٨}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س ءس}$$

ومنها $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س ءس} = -\frac{\text{٢}}{\text{٥}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا٢س} + \text{جـ}$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس}) \text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ظتاس ءس}$

نفرض أن: $\text{ن} = \text{قتاس}$ ، $\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = -\text{قتاس ظتاس ءس}$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}} \quad \int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس}) \text{ءس} = \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ظتاس ءس}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ظتاس ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس ظتاس ءس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس}) \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{قتاس} + \text{جـ}$$

ي) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٣}}} \text{جتا}\left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right) \text{ءس}$

نفرض $ص = \frac{١}{س}$ **ومنها** $-س^{٢}ءص = ءس$

$$\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) ءس = -\int ص جتا ص ءص$$

ثم نكامل الناتج بالأجزاء فيكون الجواب $\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) ءس = -\frac{١}{س} جا\frac{١}{س} - جتا\frac{١}{س} + جـ$

السؤال الثاني:

نفرض أن: $ن = لـو_{هـ} س$ $\qquad$ $ءع = س^{ن} ءس$

$\therefore ءن = \frac{١}{س} ءس$ $\qquad$ $ع = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$$\int س^{ن} لـو_{هـ} س ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{١}{س} ءس$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\left(لـو_{هـ} س - \frac{١}{ن+١}\right) + جـ$$

تمارين (٤-٤ ج)	صفحة	١٥٩

السؤال الأول:

أ) $\int \frac{س+٢}{س^{٢}-٢س-٣} ءس = \int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} ءس$

$\frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١}$ **ومنها يكون** $س+٢ = أ(س+١) + ب(س-٣)$

وتكون $أ = \frac{٥}{٤}$، $ب = \frac{-١}{٤}$ **ومنها**

$$\int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} ءس = \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س-٣} ءس + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{س+١} ءس = \frac{٥}{٤} لـو_{هـ}|س-٣| + \frac{-١}{٤} لـو_{هـ}|س+١| + جـ$$

ب) $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦} ءس$ **. بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام،**

فنجري القسمة المطولة $س^{٢}+٢ \div (س^{٢}+س-٦)$ **وينتج أن**

$$\frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦} = ١ + \frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}$$

ومنها $\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{أ}{س+٣} + \frac{ب}{س-٢}$ **، وبعد الحل ينتج أن** $أ = \frac{-١١}{٥}$، $ب = \frac{٦}{٥}$

ويكون $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}\,ءس = س + \frac{-١١}{٥}\,لـو_{هـ}|س+٣| + \frac{٦}{٥}\,لـو_{هـ}|س-٢| + جـ$

ج) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,ءس$ **نفرض** $ص = \sqrt{س}$ **ومنها** $٢ص\,ءص = ءس$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,ءس = \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}\,ءص$ **وبإجراء القسمة المطولة ينتج أن:**

$\frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢} = ٢ + \frac{٢ص+٤}{ص^{٢}-ص-٢} = ٢ + \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+١}$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}\,ءس = ٢\sqrt{س} + \frac{٨}{٣}\,لـو_{هـ}(\sqrt{س}-٢) - \frac{٢}{٣}\,لـو_{هـ}(\sqrt{س}+١) + جـ$

د) $\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}\,ءس$

$\frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} + \frac{جـ}{س+١}$ **وينتج أن** $أ = -٢$، $ب = \frac{٣}{٢}$، $جـ = \frac{١}{٢}$

$\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}\,ءس = -٢لـو_{هـ}|س| + \frac{٣}{٢}\,لـو_{هـ}|س-١| + \frac{١}{٢}\,لـو_{هـ}|س+١| + جـ$

هـ) $\int قتاس\,ءس = \int \frac{قتاس(قتاس+ظتاس)}{قتاس+ظتاس}\,ءس$

$= \int \frac{قتا^{٢}س+قتاس\,ظتاس}{قتاس+ظتاس}\,ءس = -لـو_{هـ}|قتاس+ظتاس| + جـ$

و) $\int \frac{١}{س-س(لـو_{هـ}س)^{٢}}\,ءس$

الحل: نفرض $ص = لـو_{هـ}س$ **ومنها** $س\,ءص = ءس$

$\int \frac{س}{س-س\,ص^{٢}}\,ءص = \int \frac{١}{١-ص^{٢}}\,ءص = \int \frac{-١}{ص^{٢}-١}\,ءص$

$\frac{-١}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$ **ومنها**

$\int \frac{١}{س-س(لـو_{هـ}س)^{٢}}\,ءس = \frac{-١}{٢}\,لـو_{هـ}|لـو_{هـ}س-١| + \frac{١}{٢}\,لـو_{هـ}|١+لـو_{هـ}س| + جـ$

السؤال الثاني

أ) $\int \frac{-س+7}{س^2+س-2} ءس$

$\frac{-س+7}{(س-1)(س+2)} = \frac{أ}{س-1} + \frac{ب}{س+2}$ ومنها أ = 2، ب = -3

وينتج أن $\int \frac{-س+7}{س^2+س-2} ءس = 2لو_{هـ}|س-1| - 3لو_{هـ}|س+2| + جـ$

ب) $\int \frac{جاس}{16-جتا^2 س} ءس$ نفرض ص = جتاس ومنها $ءس = \frac{ءص}{-جاس}$

$\int \frac{جاس}{16-جتا^2 س} ءس = \int \frac{جاس}{16-ص^2} \frac{ءص}{-جاس} = \int \frac{ءص}{ص^2-16}$

$\frac{1}{ص^2-16} = \frac{أ}{ص-4} + \frac{ب}{ص+4}$ ومنها أ = $\frac{1}{8}$ ، ب = $\frac{-1}{8}$

$\int \frac{جاس}{16-جتا^2 س} ءس = \frac{1}{8} لو_{هـ}|ص-4| - \frac{1}{8} لو_{هـ}|ص+4| + جـ$

أي أن $\int \frac{جاس}{16-جتا^2 س} ءس = \frac{1}{8} لو_{هـ}|جتاس-4| - \frac{1}{8} لو_{هـ}|جتاس+4| + جـ$

جـ) $\int \frac{قتا^2 س}{2-قتا^2 س} ءس = \int \frac{قتا^2 س}{1-ظتا^2 س} ءس$ ، نفرض ص = ظتاس ومنها $ءس = \frac{ءص}{-قتا^2 س}$

$\int \frac{قتا^2 س}{2-قتا^2 س} ءس = \int \frac{قتا^2 س}{1-ص^2} \frac{ءص}{-قتا^2 س} = \int \frac{1}{ص^2-1} ءص$ ثم نكامل بالكسور الجزئية

$\frac{1}{ص^2-1} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}$ وينتج أن أ = $\frac{1}{2}$، ب = $\frac{-1}{2}$ فيكون

$\int \frac{قتا^2 س}{2-قتا^2 س} ءس = \int \frac{\frac{1}{2}}{ص-1} ءس - \int \frac{\frac{1}{2}}{ص+1} ءس = \frac{1}{2} لو_{هـ}|ظتاس-1| - \frac{1}{2} لو_{هـ}|ظتاس+1| + جـ$

د)

$$\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}+\text{س}^{٣}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٣}+١)}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}\,(\text{س}^{٣}+١)}\,\text{ءس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ١$ **ومنها** $\frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢}} = \text{ءس}$ **فيكون** $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}+\text{س}^{٣}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ءص}}{٣\text{ص}(\text{ص}-١)}$

وينتج أن $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}+\text{س}^{٣}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣}+١|\right) + \text{جـ}$

تمارين عامة(الوحدة الرابعة): صفحة	١٦٠

السؤال الأول: الموضوعي

الفقرة	١	٢	٣	٤
الاجابة	ج	د	ج	ب

السؤال الثاني:

يكون $\text{م}(\text{س})$ **اقترانا أصليا للاقتران** $\text{ن}(\text{س})$ **اذا كان** $\text{م}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{س})$

وبما أن $\text{م}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١-\text{س}^{٢}}} = \frac{-\text{س}}{\sqrt{١-\text{س}^{٢}}} = \text{ه}(\text{س})$

السؤال الثالث:

$\int \text{ن}''(\text{س})\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٣\text{جاس})\,\text{ءس} = \text{ه}'(\text{س}) + \text{جـ}$ **ومنها**

$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{جتاس} + \text{جـ}$ **، وبما أن** $\text{ن}'(٠) = ٣$ **فتكون** $\text{جـ} = ٦$

أي أن $\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{جتاس} + ٦$

كما أن $\text{ن}(\text{س}) = \int \text{ن}'(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٤}}{١٢} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + \text{ء}$

وبما أن $\text{ن}(٠) = ٢$ **فإن** $\text{ء} = ٢$ **ومنها** $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{١٢} - ٣\text{جاس} + ٦\text{س} + ٢$

السؤال الرابع

ف(ن) = ∫ع ءن = ∫(٤ن + لـوهـ (ن + ١)) ءن

ف(ن) = ٢ن^{٢} + نلـوهـ (ن + ١) − (ن + ١) − ن + لـوهـ (ن + ١) + جـ

وبما أن ف(١) = ٨، فإن جـ = ٧ − لـوهـ ٤ فيكون

ف(ن) = ٢ن^{٢} + نلـوهـ (ن + ١) − (ن + ١) − ن + لـوهـ (ن + ١) + ٧ − لـوهـ ٤

ف(٣) = ٢٢ + ٣لـوهـ ٤ **مترا**

السؤال الخامس:

١) ∫ س $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣}$ ءس

نفرض ص = س^{٢} − ٣ **فيكون** $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$ = ءس **فيكون** ∫ س ص$^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$ = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

٢) ∫ $\frac{١}{\text{س}^{١٠} + \text{س}}$ ءس = ∫ $\frac{١}{\text{س(س}^{٩} + ١)}$ ءس **نفرض** ص = س^{٩} + ١ **فيكون** $\frac{\text{ءص}}{\text{٩س}^{٨}}$ = ءس

أي أن ∫ $\frac{١}{\text{س}^{١٠} + \text{س}}$ ءس = ∫ $\frac{١}{\text{س(س}^{٩} + ١)}$ ءس = $\frac{١}{٩}$ ∫ $\frac{١}{\text{ص(ص} - ١)}$ ءص

وبالكسور الجزئية ينتج أن: ∫ $\frac{١}{\text{س}^{١٠} + \text{س}}$ ءس = $\frac{١}{٩}$ (لـوهـ |س^{٩}| − لـوهـ |س^{٩} + ١|) + جـ

٣) ∫ قا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$ ءس **نفرض** ص = $\sqrt{\text{س}}$ **فيكون** ٢ص ءص = ءس **أي أن**

∫ قا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$ ءس = ∫ ٢ص قا^{٢}ص ءص **ثم** **نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: ق = ٢ص ءع = قا^{٢}ص ءص

∴ ءق = ٢ءص ع = ظاص

∫ قا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$ ءس = ∫ ٢ص قا^{٢}ص ءص = ٢ص ظاص − ٢ ∫ ظاص ءص

= ٢$\sqrt{\text{س}}$ ظا$\sqrt{\text{س}}$ + ٢لـوهـ |جتا$\sqrt{\text{س}}$| + جـ

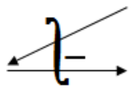
٤) ∫ قا(٣س + ١) ظا(٣س + ١) ءس = $\frac{١}{٣}$ قا(٣س + ١) + جـ

٥) ∫ (س^{٢} + ١) جتاس ءس **نكامل بالأجزاء مرتين فينتج أن :**

∫ (س^{٢} + ١) جتاس ءس = (س^{٢} + ١) جاس + ٢س جتاس − ٢جاس + جـ

٦) ∫ لـوهـ (س^{٢} − ١) ءس

نفرض أن: $\text{ن} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ١)$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}\text{ءس}$ $\qquad$  $\qquad$ $\text{ع} = \text{س}$

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\text{ءس} = \text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - \int \dfrac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-١}\text{ءس}$$

ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية وينتج أن: $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١)\text{ءس}$

$$= \text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-١) - ٢\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$$

٧) $\displaystyle\int \dfrac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٣}+\text{س}}\text{ءس} = \int \dfrac{١}{\text{س}}\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٨) $\displaystyle\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\text{ءس}$ **نفرض** $\text{ص} = \text{ظاس}$ **فيكون** $\dfrac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \text{ءس}$

$\displaystyle\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\text{ءس} = \int \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{١-\text{ص}^{٢}}\text{ءس} = \int \dfrac{١+\text{ص}^{٢}}{١-\text{ص}^{٢}}\text{ءص}$ **ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية**

وينتج $\displaystyle\int \dfrac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{١-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\text{ءس} = -\text{ظاس} - \text{لـو}_{\text{هـ}}|١-\text{ظاس}| + \text{لـو}_{\text{هـ}}|١+\text{ظاس}| + \text{جـ}$

٩) $\displaystyle\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س})\text{ءس} = \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\text{ءس}$

$\displaystyle= \int \text{جتا}٢\text{س ءس} = \dfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

١٠) $\displaystyle\int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٨}\text{قتاس ءس} = \int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٧}(\text{قتاس}+\text{ظتاس})\text{قتاس ءس}$

$\displaystyle= \int (\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٧}(\text{قتا}^{٢}\text{س}+\text{ظتاس قتاس})\text{ءس} = -\dfrac{١}{٨}(\text{قتاس}+\text{ظتاس})^{٨} + \text{جـ}$

١١) $\displaystyle\int (\text{س}^{٨} - ٦\text{س})^{٦}\text{ءس} = \int \left(\text{س}(\text{س}^{٧}-٦)\right)^{٦}\text{ءس} = \int \text{س}^{٦}(\text{س}^{٧}-٦)^{٦}\text{ءس}$

$\displaystyle= \dfrac{١}{٧}\int ٧\text{س}^{٦}(\text{س}^{٧}-٦)^{٦}\text{ءس} = \dfrac{١}{٤٩}(\text{س}^{٧}-٦)^{٧} + \text{جـ}$

السؤال السادس:

بما أن $\text{ع} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ **فإن** $\dfrac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ **ومنها** $\dfrac{\text{ءف}}{\sqrt{\text{ف}}} = \text{أءن}$

$\text{ف}^{-\frac{١}{٢}}\text{ءف} = \text{أءن}$ **ويكون** $٢\text{ف}^{\frac{١}{٢}} = \text{أن} + \text{جـ}$

لكن $\text{ف}(٢) = ٩$ **ومنها** $٢\text{أ} + \text{جـ} = ٦$ **،** **كذلك** $\text{ف}(٤) = ١٦$ **فيكون** $٤\text{أ} + \text{جـ} = ٨$

وبحل المعادلتين ينتج أن $\text{أ} = ١$

السؤال السابع:

نكامل الطرفين بالنسبة ل س

$$\int \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{جتاس}\,\text{ءس}$$

وبتكامل الجزء الأول $\int \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$ **بالأجزاء ينتج أن**

$$\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$$

أي أن $\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جـ}$ وبما أن $\text{ق}(\pi) = ٠$ فإن $\text{جـ} = ٠$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

حل آخر: بما أن $\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) + ١ \times \text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ **فإن** $(\text{س}\,\text{ق}(\text{س}))' = \text{جتاس}$ **ومنه**

$$\int (\text{س}\,\text{ق}(\text{س}))'\,\text{ءس} = \int \text{جتاس}\,\text{ءس}$$

أي أن $\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{جـ}$ وبما أن $\text{ق}(\pi) = ٠$ فإن $\text{جـ} = ٠$ **ومنها يكون** $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

حلول الوحدة الخامسة

تمارين (٥-١) صفحة ١٧٠

السؤال الأول: أ) $\text{س}_٢ = -١ + \frac{٢ - -١}{٦} \times ٢ = ٠$

ب) الفترة الجزئية الرابعة $= [\frac{١}{٢}، ١]$

السؤال الثاني: $\text{س}_٤ = \text{جـ} + \frac{٧ - \text{جـ}}{١٠} \times ٤ = ٤$ ومنها $\text{جـ} = ٢$

السؤال الثالث: $\sigma_٤ = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ لأن طول الفترة الجزئية يساوي ١ ، فتكون

$$\text{م}(\sigma_٤، \text{ق}) = ١ \times \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=٤} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = ١ \times (\text{ق}(٢) + \text{ق}(٣) + \text{ق}(٤) + \text{ق}(٥))$$

$$\text{م}(\sigma_٤، \text{ق}) = ١ \times (٢ + -٣ + -١٠ + -١٩) = -٣٠$$

السؤال الرابع: $\text{ق}(\text{س}) = ٢ + \text{هـ}^{\text{س}}$ ، طول الفترة الجزئية =١

فتكون $\sigma_٣ = \{-١، ٠، ١، ٢\}$

م$(\sigma_{٣}،\text{ن}) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٣}$ ق(س$^{*}_{ر}$) $= ١ \times ($ق$(-١) +$ ق$(٠) +$ ق$(١)) = = ٧ + $هـ$ + \frac{١}{\text{هـ}}$

السؤال الخامس: ق(س) $= \frac{\text{أس}}{\text{س} + ٢}$ ، $\sigma_{٥} = \{-١، ٠، ٢، ٣، ٦، ٨\}$

الفترات الجزئية هي : $[-١، ٠]، [٠، ٢]، [٢، ٣]، [٣، ٦]، [٦، ٨]$

م$(\sigma_{٥}،\text{ن}) = ١ \times -$أ$ + ٢ \times ٠ + ١ \times \frac{\text{٢أ}}{٤} + ٣ \times \frac{\text{٣أ}}{٥} + ٢ \times \frac{\text{٦أ}}{٨}$

ومنها يكون ٥٦ $= \frac{\text{٢٨أ}}{١٠}$ **ومنها** أ $= ٢$

السؤال السادس: س$_{٢}$ = أ + $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{٨} \times ٢ = ٢$ ومنها ٣أ + ب = ٨

، س$_{٤}$ = أ + $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{١٢} \times ٤ = ٤$ ومنها ٢أ + ب = ١٢ **وبحل المعادلتين ينتج أن :**

أ $= -٤$ ، ب $= ٢٠$

السؤال السابع : ق(س) = جاس ، $\sigma_{٤} = \{٠، \frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٢}\}$

م$(\sigma_{٤}،\text{ن}) = \frac{\pi}{٦} \times \text{جا}٠ + \frac{\pi}{١٢} \times \text{جا}\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{١٢} \times \text{جا}\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦} \times \text{جا}\frac{\pi}{٣}$

$= \frac{\pi}{٦} \times ٠ + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\pi}{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\pi}{٢٤}(١ + \sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣})$

السؤال الثامن : طول الفترة الجزئية $= \frac{١}{\text{ن}}$

ل = م$(\sigma_{\text{ن}}،\text{ن}) = \frac{١}{\text{ن}} \sum_{ر=١}^{ر=\text{ن}}$ ق(س$_{ر}$) ، ك = م$(\sigma_{\text{ن}}،\text{ن}) = \frac{١}{\text{ن}} \sum_{ر=١}^{ر=\text{ن}}$ ق(س$_{ر-١}$)

ل $-$ ك $= \frac{١}{\text{ن}} \left(\sum_{ر=١}^{ر=\text{ن}} \text{ق(س}_{ر}) - \sum_{ر=١}^{ر=\text{ن}} \text{ق(س}_{ر-١}) \right)$

ل $= \frac{١}{\text{ن}}($ق(س$_{١}$) + ق(س$_{٢}$) + ق(س$_{٣}$) + ... + ق(س$_{\text{ن}}$)$)$

ك $= \frac{١}{\text{ن}}($ق(س$_{٠}$) + ق(س$_{١}$) + ق(س$_{٢}$) + ... ق(س$_{\text{ن}-١}$)$)$

وبالطرح ينتج أن $\text{ل}-\text{ك} = \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) - \text{ق}(\text{س}_{0})\right) = \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{ق}(1) - \text{ق}(0)\right)$

تمارين (٥-٢) صفحة ١٧٥

السؤال الأول: $\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$ ، $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = -1 + \frac{4}{\text{ن}}\text{ر}$

ويكون $\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{ق}\left(-1 + \frac{4}{\text{ن}}\text{ر}\right) = 7 - \frac{20}{\text{ن}}\text{ر}$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{4}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \left(7 - \frac{20}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \frac{4}{\text{ن}}\left(7\text{ن} - \frac{20}{\text{ن}} \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right) = -12 - \frac{40}{\text{ن}}$$

السؤال الثاني:

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\text{أ هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}}) + \text{ب}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{ن}}\left(\text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}}) + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ب}\right) = \text{أ}\left(\frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{س}^*_{\text{ر}})\right) + \text{ب}$$

$$= \text{أ}\,\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{هـ}) + \text{ب}$$

السؤال الثالث: $\int_{1}^{\text{ب}} 2\text{س}\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-1}{\text{ن}} \sum 2\left(1 + \frac{\text{ب}-1}{\text{ن}}\text{ر}\right)$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-1}{\text{ن}} \sum 2 + 2\left(\frac{\text{ب}-1}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-1}{\text{ن}}\left(2\text{ن} + 2\frac{\text{ب}-1}{\text{ن}}\left(\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right)\right)$$

بالاختصار والتبسيط ينتج ان $\int_{1}^{\text{ب}} 2\text{س}\,\text{دس} = 2(\text{ب}-1) + (\text{ب}-1)^2 = \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(35 + \frac{2}{\text{ن}}\right) = 35$

وبحل المعادلة ينتج القيمة المطلوبة ب=٦

السؤال الرابع: نستخدم تعريف التكامل المحدود (ريمان)وينتج ان

أ) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{2}\text{س}\,\text{دس}$ ، $\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{5}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$

$$= \frac{5}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ت\left(-1+\frac{5}{ن}ر\right) = \frac{5}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

وينتج أن $\int_{-1}^{4}\frac{1}{2}\,دس = \lim\limits_{ن\to\infty} م(\sigma_ن ، ت) = \lim\limits_{ن\to\infty}\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

ب) $م(\sigma_ن ، ت) = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ت(س_ر^*) = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} ت\left(1+\frac{1}{ن}ر\right)$

$$= \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}\left(4-6\left(1+\frac{1}{ن}ر\right)\right) = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}\left(-2-\frac{6}{ن}ر\right)$$

$$= \frac{1}{ن}\left(-2ن-\frac{6}{ن}\cdot\frac{ن(ن+1)}{2}\right) = -5-\frac{3}{ن}$$

$$\int_{1}^{2}(4-6س)\,دس = \lim_{ن\to\infty} م(\sigma_ن ، ت) = -5$$

السؤال الخامس: لاحظ ان $ت(س) = \frac{جتا^3 س - 1}{جتاس - 1} = \frac{(جتاس-1)(جتا^2 س + جتاس + 1)}{جتاس - 1}$ ،

نفرض $هـ(س) = جتا^2 س + جتاس + 1$ معرفا على الفترة $[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$ ، فيكون $ت(س) = هـ(س)$
$\forall س \in [\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}] - \{0\}$

بما ان هـ(س) متصلا على مجاله فهو قابل للتكامل ايضا

حسب النظرية فان ت(س) قابل للتكامل على الفترة $[\frac{-\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}]$

تمارين (٥ ـــ ٣) صفحة ١٨٠

السؤال الأول: أ) $\int_{0}^{4}(3+\sqrt{س})^2\,دس = \int_{0}^{4}(9+6\sqrt{س}+س)\,دس =$

$$= \int_{0}^{4}(9+6س^{\frac{1}{2}}+س)\,دس = 9س + 4س^{\frac{3}{2}} + \frac{س^2}{2}\Big|_{0}^{4} = 76$$

ب) $\int_{١}^{٢} س(س^{٢}-٣)^{٣}\,دس$ ، بفرض $(س^{٢}-٣)=ص$ واجراء التكامل بالتعويض ينتج

$$\int_{١}^{٢} س(س^{٢}-٣)^{٣}\,دس = \frac{١}{٢}\int_{-٢}^{١}(ص)^{٣}\,دص = \frac{١^{٤}-(-٢)^{٤}}{٨} = \frac{-١٥}{٨}$$

ج) $\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ}س\,دس$

بالأجزاء $ع = لـو_{هـ}س$ ، $دهـ = دس$

$دع = \frac{١}{س}\,دس$ ، $هـ = س$

$$\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ}س\,دس = س\,لـو_{هـ}س - س\Big|_{١}^{هـ} = هـ - ٠ - (هـ-١) = ١$$

د) $\int_{٠}^{٢} ١٢٠\,س^{٢}(س-١)^{٣}\,دس$ بفرض $ص = س-١$ ، $دس = دص$

$$\int_{٠}^{٢} ١٢٠\,س^{٢}(س-١)^{٣}\,دس = \int_{-١}^{١} ١٢٠(ص+١)^{٢}(ص)^{٣}\,دص$$

$$= \int_{-١}^{١} ١٢٠(ص^{٢}+٢ص+١)ص^{٣}\,دص = \int_{-١}^{١} ١٢٠(ص^{٥}+٢ص^{٤}+ص^{٣})\,دص$$

$$= ١٢٠\left(\frac{١}{٦}+٢\times\frac{١}{٥}+\frac{١}{٤}\right) - ١٢٠\left(\frac{(-١)^{٦}}{٦}+٢\times\frac{(-١)^{٥}}{٥}+\frac{(-١)^{٤}}{٤}\right) = ١٢٠\times\frac{٤}{٥} = ٩٦$$

السؤال الثاني : $ق(س) = \frac{س}{س+١}$ ، **في الفترة** $[٠، ٤]$

$$ت(س) = \int_{٠}^{س} ق(ص)\,دص = \int_{٠}^{س}\frac{ص}{ص+١}\,دص$$

$$= \int_{\cdot}^{س} \frac{ص+1-1}{ص+1} ءص = \int_{\cdot}^{س} 1 ءص - \int_{\cdot}^{س} \frac{1}{ص+1} ءص$$

$$= (ص - لـو_{هـ}|ص+1|) \Big|_{\cdot}^{س} = س - لـو_{هـ}|س+1|$$

السؤال الثالث: بما أن ت$(-2) = 0$ فإن $2(-2)^2 + أ = 0$ ومنها أ $= -8$

كما أن ت(س) متصل دائما على مجاله

ت$(3^-) = $ ت(3^+) ومنها $10 = 3ب + 1$ ، ومنها تكون ب $= 3$

السؤال الرابع : $ت(س) = \int_{\frac{1}{2}}^{س} ق(ص) ءص = س + جا \pi س + جـ$

لمعرفة قيمة الثابت جـ ، فإن $ت(\frac{1}{2}) = 0$ ومنها $\frac{1}{2} + 1 + جـ = 0 \Leftarrow جـ = \frac{-3}{2}$

$ت'(س) = ق(س) = 1 + \pi جتا \pi س$

لإيجاد ق(2) نعوض بدل س (1) فينتج ان $= ق(2) = 1 + \pi جتا 2\pi = 1 + \pi$

السؤال الخامس: $ت'(س) = (أ + هـ^{س})$

$ت'(2) = (أ + هـ^{2}) = -1$ ومنها أ $= -1 - هـ^{2}$

السؤال السادس : $\int_{\cdot}^{1} (س^2 - 2س)(س-1)^5 ءس$

نفرض ص = س − 1 ، فيكون ءص = ءس ، وعندما س=0 فإن ص=-1 ، وعندما س=1 فإن ص=0

أي أن $\int_{-1}^{\cdot} (ص+1)(ص-1)(ص)^5 ءص = \int_{-1}^{\cdot} (ص^2-1)(ص)^5 ءص$

$$= \int_{-1}^{\cdot} (ص^7 - ص^5) ءص = \frac{ص^8}{8} - \frac{ص^6}{6} \Big|_{-1}^{\cdot} = \frac{1}{24}$$

تمارين (٥-٤) صفحة ١٨٧

السؤال الاول: أ) $\int_{0}^{\pi} \text{جا}^{2}\text{س}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\text{جتا}2\text{س})\,\text{ءس} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{جا}2\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

ب) $\int_{0}^{2}(1+\text{هـ}^{\text{س}})^{2}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2}(1+2\text{هـ}^{\text{س}}+\text{هـ}^{2\text{س}})\,\text{ءس} = (\text{س}+2\text{هـ}^{\text{س}}+\frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}})\Big|_{0}^{2}$

$= (2+2\text{هـ}^{2}+\frac{\text{هـ}^{2\times2}}{2}) - (0+2\text{هـ}^{0}+\frac{\text{هـ}^{2\times0}}{2}) = \frac{\text{هـ}^{4}}{2}+2\text{هـ}^{2}-\frac{1}{2}$

جـ) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(\text{س}+1)(\text{س}^{2}+4)\,\text{ءس} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(\text{س}^{3}+\text{س}^{2}+4\text{س}+4)\,\text{ءس}$

$= (\frac{\text{س}^{4}}{4}+\frac{\text{س}^{3}}{3}+2\text{س}^{2}+4\text{س})\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

د) $\int_{-2}^{1}\frac{\text{س}^{3}-27}{\text{س}^{2}+3\text{س}+9}\,\text{ءس} = \int_{-2}^{1}\frac{(\text{س}-3)(\text{س}^{2}+3\text{س}+9)}{\text{س}^{2}+3\text{س}+9}\,\text{ءس}$

$= \int_{-2}^{1}(\text{س}-3)\,\text{ءس} = (\frac{\text{س}^{2}}{2}-3\text{س})\Big|_{-2}^{1} = \frac{-21}{2}$

السؤال الثاني: أ) **نفرض** $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{2}+2-(2\text{س}-1) = \text{س}^{2}-2\text{س}+3$

لاحظ ان $\text{ن}(\text{س}) \geq 0$ **دائما لان المميز سالب ومنها** $(\text{س}^{2}+2)-(2\text{س}-1) \geq 0$

$(\text{س}^{2}+2) \geq (2\text{س}-1)\ \forall \text{س} \in [1،2]$ أي ان $\int_{1}^{2}(\text{س}^{2}+2)\,\text{ءس} \geq \int_{1}^{2}(2\text{س}-1)\,\text{ءس}$

ب) **لا حظ ان** $\text{س}^{2}+2 \geq 0$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح}$ ، **و حسب خاصية المقارنة**

$\int_{2}^{3}(\text{س}^{2}+2\text{س})\,\text{ءس} \geq 0$

السؤال الثالث: (أ: $\int_{5}^{7}\text{س}^{3}\,\text{ءس} + \int_{1}^{5}\text{س}^{3}\,\text{ءس} = \int_{1}^{7}\text{س}^{3}\,\text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢}\ \text{ءس} - \int_{٤}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢}\ \text{ءس}$

$= \int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}+٢}\ \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} \sqrt{\text{س}+٢}\ \text{ءس} = \int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}+٢}\ \text{ءس}$

ج) $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{ءس} - \int_{٣}^{١} ٤\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٥} (\text{س}^{٢}+٤)\ \text{ءس} =$

$= \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{ءس} + \int_{١}^{٣} ٤\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٥} (\text{س}^{٢}+٤)\ \text{ءس} = \int_{١}^{٣} (\text{س}^{٢}+٤)\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٥} (\text{س}^{٢}+٤)\ \text{ءس}$

$= \int_{١}^{٥} (\text{س}^{٢}+٤)\ \text{ءس}$

د) $\int_{٢}^{٥} (\text{س}-١)\ \text{ءس} + \int_{٧}^{٥} \frac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}+١}\ \text{ءس} = \int_{٢}^{٥} (\text{س}-١)\ \text{ءس} + \int_{٧}^{٥} \frac{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}{\text{س}+١}\ \text{ءس}$

$= \int_{٢}^{٥} (\text{س}-١)\ \text{ءس} + \int_{٧}^{٥} (\text{س}-١)\ \text{ءس} = \int_{٢}^{٥} (\text{س}-١)\ \text{ءس} + \int_{٥}^{٧} (\text{س}-١)\ \text{ءس}$

$= \int_{٢}^{٧} (\text{س}-١)\ \text{ءس}$

السؤال الرابع: $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٧$

أ) $\int_{١}^{٥} (٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س} + ١)\ \text{ءس} = ٢\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} - ٣\int_{١}^{٥} \text{س}\ \text{ءس} + \int_{١}^{٥} \text{ءس}$

$= ٢ \times ٧ - ٣(١٢) + ٤ = -١٨$

ب) $\int_{١}^{٥} ٢\text{أ}\,\text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٢\text{أ}\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٢\text{أ} \times ٧ = ١$ **ومنها** $\text{أ} = \frac{١}{١٤}$

السؤال الخامس: $\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$

أ) $\int_{١}^{٥} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٢)\,\text{دس} = ٣\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{١}^{٥} ٢\,\text{دس}$

$٣ \times ٨ - ٢ \times ٤ = ١٦$

ب) $\int_{٣}^{٧} (٤\text{ق}(\text{س} - ٢) - ٢\text{س})\,\text{دس}$

بفرض $\text{ص} = \text{س} - ٢$ **وتبديل حدود التكامل يصبح** $\int_{٣}^{٧} \text{ق}(\text{س} - ٢)\,\text{دس} = \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$\int_{٣}^{٧} (٤\text{ق}(\text{س} - ٢) - ٢\text{س})\,\text{دس} = ٤\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \int_{٣}^{٧} ٢\text{س}\,\text{دس} = ٤ \times ٨ - ٤٠ = -٨$

السؤال السادس:

$\int_{٢}^{٧} ٣\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٩ \text{ ،} \int_{٢}^{٤} ٥\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠$

$\int_{٤}^{٧} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\int_{٤}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢(\int_{٤}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس})$

$٢(-\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس})$

$٢(-٢ + ٣) = ٢$

السؤال السابع: $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٨$

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{١}^{٢} (\text{أس} + ١)\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس} = ١٨$

$\text{أ}(\frac{٤-١}{٢}) + ١ + (٢٧ - ٨) = ١٨$

$\frac{٣\text{أ}}{٢} = -٢ \Leftarrow \text{أ} = -\frac{٤}{٣}$

السؤال الثامن: $\int_{-١}^{٢} ٣ع^{٢} دع = ع^{٣} |_{-١}^{٢} = ٩$ فيكون

$$\int_{١}^{ب} (٤س - \int_{-١}^{٢} ٣ع^{٢} دع) دس = \int_{١}^{ب} (٤س - ٩) دس = ١٢$$

ومنها $٢ب^{٢} - ٩ب - ٥ = ٠$ أي أن $(٢ب + ١)(ب - ٥) = ٠$

$ب = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = ٥$

السؤال التاسع: $ن(س) = |٢ - س| = \begin{cases} ٢ - س ، & ٠ \le س \le ٢ \\ س - ٢ ، & ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$

١) عندما $٠ \le س \le ٢$ ، فإن $ت(س) = \int_{٠}^{س} ن(ص) دص = \int_{٠}^{س} (٢ - ص) دص = ٢س - \frac{س^{٢}}{٢}$

٢) عندما $٢ \le س \le ٥$ فإن $ت(س) = \int_{٠}^{س} ن(ص) دص = \int_{٠}^{٢} (٢ - س) دس + \int_{٢}^{س} ن(ص) دص$

$= ت(٢) + \int_{٢}^{س} (ص - ٢) دص = ٢ + (\frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ٢)$ ومنها

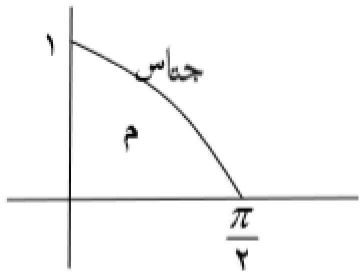
$$ت(س) = \begin{cases} ٢س - \frac{س^{٢}}{٢} ، & ٠ \le س < ٢ \\ \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ٤ ، & ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$$

تمارين (٥-٥أ) صفحة ١٩٤

السؤال الاول :

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \left|\text{ق(س)}\right| \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جتاس ءس}$$

$$= \text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \text{جا(٠)} = \text{١ وحدة مساحة}$$



السؤال الثاني: معادلة المستقيم

المار بالنقطتين أ(٠،٠) ، ب(١، ٢) هي

$$\frac{\text{ص} - \text{٠}}{\text{س} - \text{٠}} = \frac{\text{٢} - \text{٠}}{\text{١} - \text{٠}} \Leftarrow \text{ص} = \text{٢س}$$

نجد نقاط تقاطع ق(س) والمستقيم ص = ٢س ⇐ ه(س) = ٢س

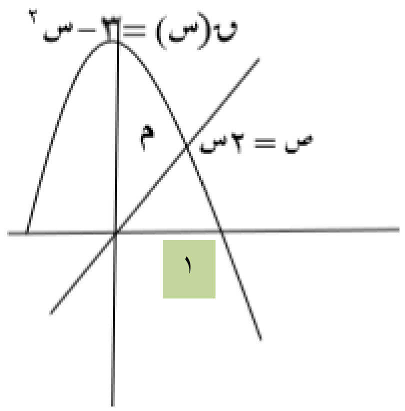
$$\text{٣} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{٢س}$$

$$\Leftarrow \text{٠} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} - \text{٣} = (\text{س} + \text{٣})(\text{س} - \text{١})$$

⇐ **س= ١ أو س= -٣ ترفض**

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \left|\text{ق(س)} - \text{ه(س)}\right| \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٣} - \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}) \text{ءس}$$

$$= \text{٣}(\text{١} - \text{٠}) - \frac{\text{١} - \text{٠}}{\text{٣}} - \text{٢} \times \frac{\text{١} - \text{٠}}{\text{٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}} \text{وحدة مساحة}$$

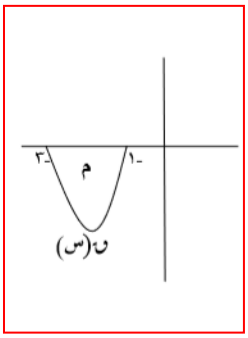


السؤال الثالث:

$$\text{ق(س)} = (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩})(\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}) \Leftarrow \text{٠} = (\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٣})(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{١})$$

ومنها س=٣ أو س=١ ترفض لأن المساحة في الربع الثالث ، س=-٣ ، س=-١

$$\text{م} = \int_{\text{-٣}}^{\text{-١}} \left|\text{ق(س)}\right| \text{ءس} = -\int_{\text{-٣}}^{\text{-١}} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩})(\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}) \text{ءس}$$



$$= \int_{-3}^{-1} -\left(\text{س}^4 - 10\,\text{س}^2 + 9\right) \text{ءس} =$$

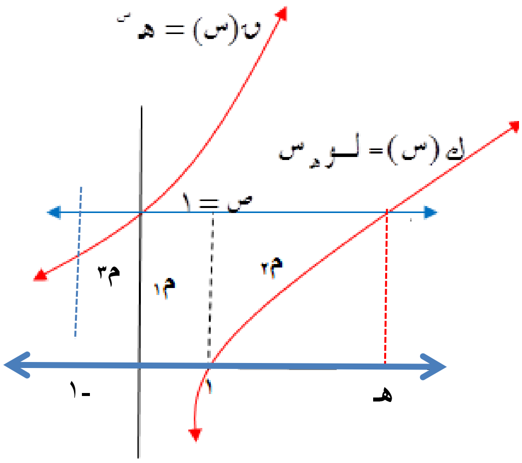
$$= -\left(\frac{(-1)^5 - (-3)^5}{5} - 10 \times \frac{(-1)^3 - (-3)^3}{3} + 9 \times (-1 + 3) \right) = \frac{304}{15} \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الرابع :

نجد نقاط التقاطع بين

أولا : ق، ص $\Leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} = 1 \Leftarrow \text{س} = 0$

ثانيا : ك ، ص $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = 1 \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}$



م = م١ + م٢ + م٣

$$\text{م}_1 = \int_{0}^{1} 1\,\text{ءس} = 1(1 - 0) = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م}_2 = \int_{1}^{\text{هـ}} (1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس} = \int_{1}^{\text{هـ}} 1\,\text{ءس} - \int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$$

$$= 1(\text{هـ} - 1) - \left(\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Big|_{1}^{\text{هـ}} - \int_{1}^{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} \right)$$

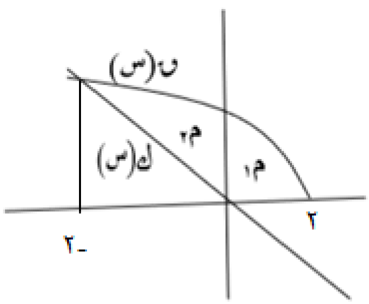
$$= \text{هـ} - 1 - (\text{هـ} - 0 - 1(\text{هـ} - 1)) = \text{هـ} - 2 \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م}_3 = \int_{-1}^{0} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} \Big|_{-1}^{0} = \left(1 - \frac{1}{\text{هـ}}\right)$$

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م} = 1 + \text{هـ} - 2 + 1 - \frac{1}{\text{هـ}} = \text{هـ} - \frac{1}{\text{هـ}} \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الخامس:

نجد نقاط التقاطع بين ق(س) ، $\text{ك(س)} \Leftarrow \text{س}^2 = 2 - \text{س}$



$\Leftarrow \text{س} = -2$ **أو س= ١ ترفض**

م = م١ + م٢

$$\text{م} = \int_{0}^{2} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \sqrt{2 - \text{س}}\,\text{ءس}\,|$$

$$= \left[\frac{(\text{٢} - \text{س})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \times \text{١}^{-}} \right]_{\text{٠}}^{\text{٢}} = \frac{\text{٢}^{-}}{\text{٣}} \times \left(\sqrt{\text{٢} - \text{س}} \right)^{\text{٣}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{٢}^{-}}{\text{٣}} \left(\text{٢}^{-} \sqrt{\text{٢}} \right) = \frac{\text{٤} \sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}} \text{وحدة مساحة}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} \left| \text{ن(س)} - \text{ك(س)} \right| \text{ءس} = \int_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} \left(\sqrt{\text{٢} - \text{س}} - (\text{س}^{-}) \right) \text{ءس}_{\text{٢}}$$

$$= \left[\frac{(\text{٢} - \text{س})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \times \text{١}^{-}} \right]_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} + \left[\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} \right]_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} = \frac{\text{٢}^{-}}{\text{٣}} \left(\text{٢} \sqrt{\text{٢}} - \text{٨} \right) + \frac{\text{٠} - \text{٤}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} - \frac{\text{٤} \sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}} \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م} = \frac{\text{٤} \sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} - \frac{\text{٤} \sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} \text{وحدة مساحة}$$

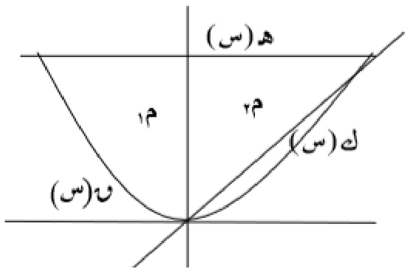
السؤال السادس:

$$\text{ن(س)} = \text{هـ(س)} \leftarrow \text{س} = \pm \text{٢}$$

$$\text{ن(س)} = \text{ك(س)} \leftarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{٢س} \leftarrow \text{س} = \text{٠} \text{ أو } \text{س} = \text{٢}$$

$$\text{هـ(س)} = \text{ك(س)} \leftarrow \text{س} = \text{٢}$$

$$\text{م} = \text{م}_{\text{١}} + \text{م}_{\text{٢}}$$



$$\text{م} = \int_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} \left(\text{هـ(س)} - \text{ن(س)} \right) \text{ءس} = \int_{\text{٢}^{-}}^{\text{٠}} \left(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}} \right) \text{ءس}_{\text{١}}$$

$$= \text{٤}(\text{٠} + \text{٢}) + \frac{\text{٠} - (\text{٢}^{-})}{\text{٣}} = \text{٨} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٣}} \text{وحدة مساحة}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \left(\text{هـ(س)} - \text{ك(س)} \right) \text{ءس}_{\text{٢}}$$

$$= \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٤} - \text{٢س}) \text{ءس} = \text{٤}(\text{٢} - \text{٠}) - \text{٢} \times \frac{\text{٤} - \text{٠}}{\text{٢}} = \text{٤} \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م} = \frac{\text{١٦}}{\text{٣}} + \text{٤} = \frac{\text{٢٨}}{\text{٣}} \text{وحدة مساحة}$$

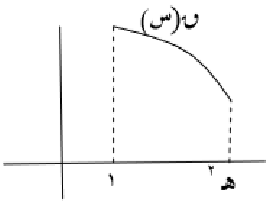
تمارين (٥-٥ب) صفحة ١٩٩

السؤال الأول: ن(س) = ٤ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س=٥ حول السينات

الحل : $\text{ع} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \text{ن}^{\text{٢}}(\text{س})\, \text{ءس} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \text{١٦}\, \text{ءس}$

$= \text{١٦}\pi(\text{٥} - \text{٠}) = \text{٨٠}\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الثاني:

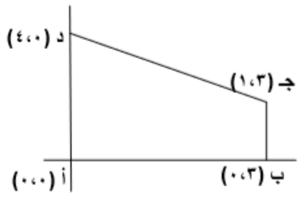


$\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{٤}}{\sqrt{\text{س}}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = هـ ٢ حول السينات

الحل : $\text{ع} = \pi \int_{\text{١}}^{\text{هـ}^{\text{٢}}} \text{ن}^{\text{٢}}(\text{س})\, \text{ءس} = \pi \int_{\text{١}}^{\text{هـ}^{\text{٢}}} \dfrac{\text{١٦}}{\text{س}}\, \text{ءس}$

$= \text{١٦}\pi\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{هـ}^{\text{٢}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{١}\right) = \text{١٦}\pi(\text{٢} - \text{٠}) = \text{٣٢}\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الثالث:



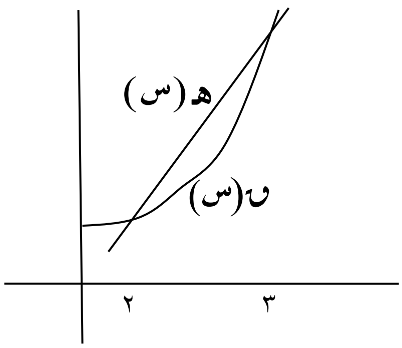
معادلة المستقيم جـ د هي

$\dfrac{\text{ص} - \text{٤}}{\text{س} - \text{٠}} = \dfrac{\text{١} - \text{٤}}{\text{٣} - \text{٠}} \leftarrow \dfrac{\text{ص} - \text{٤}}{\text{س} - \text{٠}} = {}^{-}\text{١} \leftarrow \text{ص} = {}^{-}\text{س} + \text{٤}$

$\text{ع} = \pi \int_{\text{٠}}^{\text{٣}} ({}^{-}\text{س} + \text{٤})^{\text{٢}}\, \text{ءس} = \left. \dfrac{\pi({}^{-}\text{س} + \text{٤})^{\text{٣}}}{\text{٣} \times {}^{-}\text{١}} \right|_{\text{٠}}^{\text{٣}}$

$\dfrac{{}^{-}\pi}{\text{٣}}\left(\text{١}^{\text{٣}} - \text{٤}^{\text{٣}}\right) = \dfrac{\text{٦٣}\pi}{\text{٣}} = \text{٢١}\pi$ **وحدة حجم**

السؤال الرابع :



ن(س) = س ٢ + ٦ ، هـ(س) = ٥س حول السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين ن(س) ، هـ(س)

$\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦} = \text{٥س} \leftarrow \text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦} = \text{٠}$

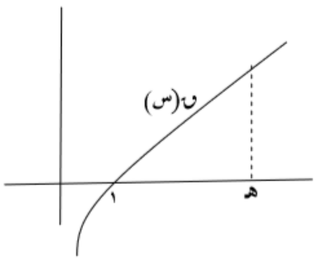
$\Leftarrow (\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{٣}) = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \text{٢} \text{ ، } \text{س} = \text{٣}$

$$=\pi\int_{2}^{3}\left(\text{هـ}^{2}(\text{س})-\text{ن}^{2}(\text{س})\right)\text{ءس}$$

$$=\pi\int_{2}^{3}\left(25\,\text{س}^{2}-\left(\text{س}^{4}+12\,\text{س}^{2}+36\right)\right)\text{ءس}=\pi\int_{2}^{3}\left(13\,\text{س}^{2}-\text{س}^{4}-36\right)\text{ءس}$$

$$=\pi\left(13\times\frac{3^{3}-2^{3}}{3}-\frac{3^{5}-2^{5}}{5}-36(3-2)\right)=\frac{62\pi}{15}\text{ وحدة حجم}$$

السؤال الخامس:



$\text{ن(س)}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ومحور السينات ، $\text{س}=1$، $\text{س}=\text{هـ}$

$$\text{ع}=\pi\int_{1}^{\text{هـ}}\text{ن}^{2}(\text{س})\,\text{ءس}=\pi\int_{1}^{\text{هـ}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2}\text{ءس}\quad\textbf{بالتعويض}$$

نفرض أن

$$\text{ص}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\Leftarrow\text{س}=\text{هـ}^{\text{ص}}$$

$$\text{ءص}=\frac{1}{\text{س}}\text{ءس}\Leftarrow\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}=\text{ءس}$$

عندما $\text{س}=1\Leftarrow\text{ص}=0$ ، $\text{س}=\text{هـ}\Leftarrow\text{ص}=1$

$$\text{ع}=\pi\int_{0}^{1}\text{ص}^{2}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}\quad\textbf{تكامل بالأجزاء}$$

نفرض أن $\text{ن(س)}=\text{ص}^{2}\Leftarrow\text{ءن}=2\text{ص}\,\text{ءص}$

ونفرض أن $\text{ءو}=\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}\Leftarrow\text{و}=\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\text{ع}=\pi\left(\text{ص}^{2}\text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}2\text{ص}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}\right)=\pi\left(\text{هـ}-0-\int_{0}^{1}2\text{ص}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}\right)$$

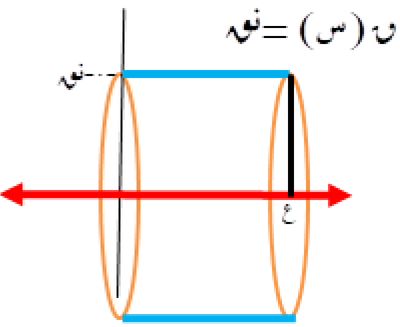
نجد $\int_{0}^{1}2\text{ص}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}$ **بالأجزاء**

نفرض أن $\text{ن}=2\text{ص}\Leftarrow\text{ءن}=2\text{ءص}$ ، $\text{ءو}=\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}\Leftarrow\text{و}=\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\int_{0}^{1}2\text{ص}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}=2\text{ص}\times\text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}2\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ءص}=2\text{هـ}-0-2(\text{هـ}-1)=2$$

$$\text{ع}=\pi(\text{هـ}-2)\ \textbf{وحدة حجم}$$

السؤال السادس :



الحل: نجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين ن(س)=نوء ومحوري الاحداثيات والمستقيم س = ع دورة كاملة حول محور السينات

$$\text{ح} = \pi\int_{٠}^{\text{ع}} \text{ن}^{٢}(\text{س})\,\text{ءس} = \pi\int_{٠}^{\text{ع}} \text{نوء}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= \pi\,\text{نوء}^{٢}(\text{ع}-٠) = \pi\,\text{نوء}^{٢}\,\text{ع}\ \text{وحدة حجم}$$

السؤال السابع:

$\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{٤}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$ **ومحور السينات والمستقيمين**

س=٢ ، س=٣ دورة كاملة حول محور السينات

الحل : $\text{ح} = \pi\int_{٢}^{٣} \text{ن}^{٢}(\text{س})\,\text{ءس} = \pi\int_{٢}^{٣} \dfrac{١٦}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$

$= \pi\int_{٢}^{٣} \dfrac{١٦}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}\,\text{ءس}$ **تكامل بالكسور الجزئية**

$$\frac{\text{أ}}{\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١} = \frac{١٦}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$$

$$\Leftarrow \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}(\text{س}-١) = ١٦$$

عندما $\text{س}=١ \Leftarrow ٢\text{أ}=١٦ \Leftarrow \text{أ}=٨$ ، $\text{س}=^{-}١ \Leftarrow ^{-}٢\text{ب}=١٦ \Leftarrow \text{ب}=^{-}٨$

$$\text{ح} = \pi\left(\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{\text{س}-١}\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} \frac{^{-}٨}{\text{س}+١}\,\text{ءس}\right)$$

$$\text{ح} = \pi\Big(٨\big(\text{لو}_{\text{هـ}}(٣-١) - \text{لو}_{\text{هـ}}(٢-١)\big) - ٨\big(\text{لو}_{\text{هـ}}(٣+١) - \text{لو}_{\text{هـ}}(٢+١)\big)\Big)$$

$= ٨\pi\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٨\pi\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ = ٨\pi\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{٣}{٢}\right)$ **وحدة حجم**

تمارين عامة (الوحدة الخامسة) صفحة ٢٠٠

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

السؤال الثاني :

σ_{12} ، $\text{س}_{3} = 7$ ، $[\text{أ}،\text{ب}]$ جد أ،ب

$$\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}$$

$$\text{س}_{6} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{12}\times 6 \leftarrow 12 = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{2} \leftarrow 24 = \text{أ} + \text{ب} \quad \text{-----}(1)$$

$$\text{س}_{3} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{12}\times 3 \leftarrow 7 = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{4} \leftarrow 28 = 3\text{أ} + \text{ب} \quad \text{-----}(2)$$

$$28 = 3\text{أ} + \text{ب}$$
$$24 = \text{أ} + \text{ب}$$

$$4 = 2\text{أ} \leftarrow \text{أ} = 2 \Leftarrow 24 = 2 + \text{ب} \leftarrow \text{ب} = 22$$

السؤال الثالث:

$$\text{هـ}(\text{س}) = 3\text{ق}(\text{س}) + \text{س}$$

$$\text{م}\left(\sigma_{4}\text{ ، ق}(\text{س})\right) = 6 \text{ ، س} \in [2،10]$$

$$\text{م}\left(\sigma_{4}\text{ ، ق}(\text{س})\right) = \frac{10-2}{4}\sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) \Leftarrow 6 = 2\sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) \Leftarrow \sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) = 3$$

$$\text{م}\left(\sigma_{4}\text{ ، هـ}(\text{س})\right) = \frac{10-2}{4}\sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{هـ}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = 2\sum_{\text{ر}=1}^{4}\left(3\text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) + \text{س}^{*}_{\text{ر}}\right)$$

$$= 6\sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) + 2\sum_{\text{ر}=1}^{4}\text{س}_{\text{ر}} = 6\times 3 + 2\sum_{\text{ر}=1}^{4}(2 + 2\text{ر})$$

$$= 18 + 2\left(2\times 4 + 2\,\frac{4\times(4+1)}{2}\right) = 18 + 56 = 74$$

السؤال الرابع:

$$\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}\text{، } [١،٥]\text{، } \text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ع}}\text{، } \text{ق}(\text{س})) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$$

$$= \frac{٥-١}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣\text{س}_{\text{ر}} = \frac{٤}{\text{ن}} \times ٣ \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \left(١ + \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \frac{١٢}{\text{ن}}\left(\text{ن} + \frac{٤}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}\right)$$

$$= \frac{١٢}{\text{ن}}(\text{ن} + ٢\text{ن} + ٢) = \frac{١٢}{\text{ن}}(٣\text{ن} + ٢) = ٣٦ + \frac{٢٤}{\text{ن}}$$

$$\int_{١}^{٥} ٣\text{س}\,\text{ءس} = \lim_{\text{ق}(\text{س}) \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{، } \text{ق}(\text{س})) = \lim_{\text{ق}(\text{س}) \to \infty} \left(٣٦ + \frac{٢٤}{\text{ن}}\right) = ٣٦$$

السؤال الخامس :

نفرض أن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^٢}\text{، } \text{س} \in [-٢،٢]$

نجد القيم القصوى

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{س}}{\sqrt{٤-\text{س}^٢}} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$ **ومنها تكون قيم س الحرجة هي : س=-٢، ٢، ٠**

$$\text{ق}(-٢) = \sqrt{٤ - (-٢)^٢} = ٠\text{ ، } \text{ق}(٠) = \sqrt{٤ - (٠)^٢} = ٢\text{ ، } \text{ق}(٢) = \sqrt{٤ - (٢)^٢} = ٠$$

اذن

$$٠ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٢ \leftarrow \int_{-٢}^{٢} (٠)\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} ٢\,\text{ءس} \rightarrow ٠ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^٢}\,\text{ءس} \le ٨$$

حل آخر: يمكن حل السؤال باستخدام المتباينات

$-٢ \le \text{س} \le ٢$ **ومنها** $٠ \le \text{س}^٢ \le ٤$

$-٤ \le -\text{س}^٢ \le ٠$ **وبإضافة ٤ ينتج أن** $٠ \le ٤ - \text{س}^٢ \le ٤$

فيكون $٠ \le \sqrt{٤ - \text{س}^٢} \le ٢$ **ومنها** $\int_{-٢}^{٢} ٠\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^٢}\,\text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} ٢\,\text{ءس}$

وينتج أن $0 \le \int_{-2}^{2} \sqrt{4-\text{س}^2}\,\text{دس} \le 8$

السؤال السادس :

$$\int_{0}^{\text{س}} \text{ن}(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^2 - \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ت}(\text{س}) = \text{س}^2 - \sqrt{\text{س}}$$

$$\text{ن}(\text{س}) = \text{ت}'(\text{س}) = 2\text{س} - \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \text{ن}(4) = 8 - \frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = 2 - \frac{1}{2} \times \frac{{}^{-}1}{2}\,\text{س}^{\frac{{}^{-}3}{2}}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\text{س}^{\frac{3}{2}}} \Leftarrow \text{ن}'(4) = 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{65}{32}$$

السؤال السابع:

ت(٢)=٠ ومنها ٨+٤جـ=٠ إذن جـ=-٢

ت(س) متصل عند س=٣

أ) $\lim_{\text{س} \to 3^{+}} \text{ت}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 3^{-}} \text{ت}(\text{س})$

$$3\text{أ} - \text{ب} = 18 + 2 \times {}^{-}2 \times 3 \Leftarrow 3\text{أ} - \text{ب} = 6 \quad \text{------}(1)$$

$$\text{ن}(\text{س}) = \text{ت}'(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س} + {}^{-}4 \text{، } & 2 < \text{س} \le 3 \\ \text{أ} \text{، } & 3 < \text{س} \le 5 \end{cases}$$

$\text{ت}'(3)^{+} = \text{ت}'(3)^{-} \Leftarrow \text{أ} = 8$ **نعوض قيمة أ في معادلة (١) فنحصل على ما يلي :**

$$3 \times 8 - \text{ب} = 6 \Leftarrow \text{ب} = 18$$

ب) $\int_{2}^{4} \text{ن}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ت}(4) - \text{ت}(2) = (8 \times 4 - 18) - (0) = 14$

السؤال الثامن :

أ) $\int_{1}^{2} 56(\text{س}-2)^2(\text{س}-1)^5\,\text{دس}$ ، **نفرض ان** $\text{ص} = \text{س} - 1 \Leftarrow \text{س} = \text{ص} + 1$

$\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 0$ ، $\text{س} = 2 \Leftarrow \text{ص} = 1$

$$\int_{1}^{2} ٥٦(س-٢)^{٢}(س-١)^{٥}\,ءس = \int_{٠}^{١} ٥٦(ص+١-٢)^{٢}(ص)^{٥}\,ءص$$

$$= \int_{٠}^{١} ٥٦(ص-١)^{٢}(ص)^{٥}\,ءص = \int_{٠}^{١} ٥٦(ص^{٢}-٢ص+١)ص^{٥}\,ءص$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(٥٦ص^{٧}-١١٢ص^{٦}+٥٦ص^{٥}\right)ءص = ٧ص^{٨}-١٦ص^{٧}+\frac{٢٨}{٣}ص^{٦}\Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}$$

ب) $\int_{ه}^{ه^{٢}} لـو_{ه}\,س\,ءس =$ **نفرض ان** $ع = لـو_{ه}\,س \leftarrow ءع = \frac{١}{س}\,ءس \text{ ، } ءو = ءس$

$$\int_{ه}^{ه^{٢}} لـو_{ه}\,س\,ءس = س\,لـو_{ه}\,س\Big|_{ه}^{ه^{٢}} - \int_{ه}^{ه^{٢}} \frac{١}{س}\times س\,ءس = ٢ه^{٢}-ه-ه^{٢}+ه = ه^{٢}$$

ج) $\int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ءس = \int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ءس$

$$\frac{س+٥}{س(س-١)} = \frac{أ}{س}+\frac{ب}{س-١} \leftarrow س+٥ = أ(س-١)+ب\,س$$

عندما $س = ٠ \leftarrow ٥ = -أ \leftarrow أ = -٥ \text{ ، } س = ١ \leftarrow ١+٥ = ب \leftarrow ب = ٦$

$$\int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ءس = \int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ءس = \int_{٣}^{٥} \frac{أ}{س}\,ءس + \int_{٣}^{٥} \frac{ب}{س-١}\,ءس$$

$$= -\int_{٣}^{٥} \frac{٥}{س}\,ءس + \int_{٣}^{٥} \frac{٦}{س-١}\,ءس = -٥(لـو_{ه}٥-لـو_{ه}٣)+٦(لـو_{ه}٤-لـو_{ه}٢)$$

$$= ٥لـو_{ه}\frac{٣}{٥}+٦لـو_{ه}٢$$

د) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+س^{٢}}\,ءس = \int_{٠}^{٢} |س|\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس = \int_{٠}^{٢} س\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس$ **نكامل بالتعويض**

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \leftarrow \text{دص} = ٢\text{س}\,\text{دس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

عندما $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ١$ ،   **عندما** $\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ٥$ ،

$$\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{دس} = \int_{١}^{٥} \text{س}\sqrt{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٥} \sqrt{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{١}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{١}^{٥} = \frac{١}{٣}\left(\left(\sqrt{٥}\right)^{٣} - ١\right)$$

هـ) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{دس} = \int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٣} \times \sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}}}\ \text{دس}$ **تكامل بالتعويض**

نفرض ان $\text{ص} = ١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}} \leftarrow \text{دص} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}\ \text{دس} \leftarrow \frac{-\text{س}^{٣}}{٢}\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{دس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٣} \times \sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}}}\ \text{دس} = \frac{-١}{٢}\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{دص} =$$

$$= \frac{-١}{٢}\int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{دص} = -\sqrt{\text{ص}}$$

$$\therefore \int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{دس} = -\sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}}\ \Big|_{١}^{٢} = \frac{-\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

السؤال التاسع :

$\int_{٧}^{٣} \text{ن}(\text{س} - ٢)\ \text{دس} = \int_{٥}^{١} \text{ن}(\text{س})\ \text{دس}$ **وذلك بفرض ان** $\text{ص} = \text{س} - ٢ \leftarrow \text{دص} = \text{دس}$

عندما $\text{س} = ٧ \leftarrow \text{ص} = ٥$ ، **وعندما** $\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\int_{٣}^{-١} \text{هـ}(\text{س} + ٢)\ \text{دس} = \int_{٥}^{١} \text{هـ}(\text{س})\ \text{دس}$ **وذلك بفرض ان** $\text{ص} = \text{س} + ٢ \leftarrow \text{دص} = \text{دس}$

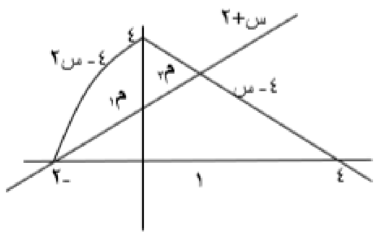
عندما $\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ٥$ ، **وعندما** $\text{س} = -١ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{ن(س)} \le \text{هـ(س)}$ ، س $\in [\text{١}،\text{٥}]$ $\leftarrow \int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ن(س)}\,\text{ءس} \le \int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

$\leftarrow -\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ن(س)}\,\text{ءس} \ge -\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ(س)}\,\text{ءس} \leftarrow \int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{ن(س)}\,\text{ءس} \ge \int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

$\leftarrow \int_{\text{٧}}^{\text{٣}} \text{ن(س} - \text{٢)}\,\text{ءس} \ge \int_{\text{٣}}^{\text{١-}} \text{هـ(س} + \text{٢)}\,\text{ءس}$ **وهو المطلوب**

السؤال العاشر :



١) نجد نقاط تقاطع ن (س) ، هـ(س) عندما

س ≤ ٠ ← س + ٢ = ٤ − س٢ ← س٢ + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠ ← س = −٢ ، س = ١ ترفض

$\leftarrow \text{م}_\text{١} = \int_{\text{٢-}}^{\text{٠}} (\text{٤} - \text{س}^\text{٢} - \text{س} - \text{٢})\,\text{ءس} = \int_{\text{٢-}}^{\text{٠}} (\text{٢} - \text{س}^\text{٢} - \text{س})\,\text{ءس}$

$= \text{٢}(\text{٠} + \text{٢}) - \frac{\text{٠} - (\text{٢-})^\text{٣}}{\text{٣}} - \frac{\text{٠} - (\text{٢-})^\text{٢}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣}}$ **وحدة مساحة**

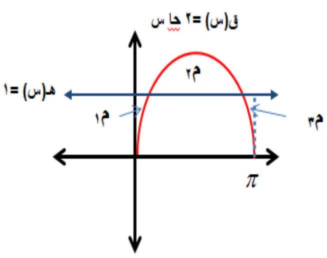
عندما س > ٠ ← س + ٢ = ٤ − س ← ٢س = ٢ ← س = ١

$\leftarrow \text{م}_\text{٢} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٤} - \text{س} - \text{س} - \text{٢})\,\text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٢} - \text{٢س})\,\text{ءس}$

$= \text{٢}(\text{١} - \text{٠}) - \text{٢} \times \frac{\text{١} - \text{٠}}{\text{٢}} = \text{٢} - \text{١} = \text{١}$ **وحدة مساحة**

$\text{م} = \text{م}_\text{١} + \text{م}_\text{٢} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} + \text{١} = \frac{\text{١٣}}{\text{٣}}$ **وحدة مساحة**

٢) ن(س) = ٢جاس ، هـ(س) = ١ ، س ∈ [٠، π]



ن(س) = هـ(س) ← ٢جاس = ١ ← جاس = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$س = \frac{\pi}{٦}$ ، $س = \frac{٥\pi}{٦}$

م = م$_١$ + م$_٢$+م$_٣$

$م_١ = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} (١ - ٢جا س) ءس = س + ٢جتا س \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$ **وحدة مساحة**

$م_٢ = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{٥\pi}{٦}} (٢جا س - ١) ءس = -٢جتا س - س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{٥\pi}{٦}} = ٢\sqrt{٣} - \frac{٢\pi}{٣}$ **وحدة مساحة**

$م_٣ = \int_{\frac{٥\pi}{٦}}^{\pi} (١ - ٢جا س) ءس = س + ٢جتا س \Big|_{\frac{٥\pi}{٦}}^{\pi} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$ **وحدة مساحة**

$م = ٢(\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢) + ٢\sqrt{٣} - \frac{٢\pi}{٣} = ٤\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣} - ٤$ **وحدة مساحة**

السؤال الحادي عشر :

$\int_{١}^{٣} (جا^٢ س + هـ^س) ءس = أ$ ، $\int_{١}^{٣} جتا^٢ س ءس = ب$

$أ + ب = \int_{١}^{٣} (جا^٢ س + هـ^س) ءس + \int_{١}^{٣} جتا^٢ س ءس$

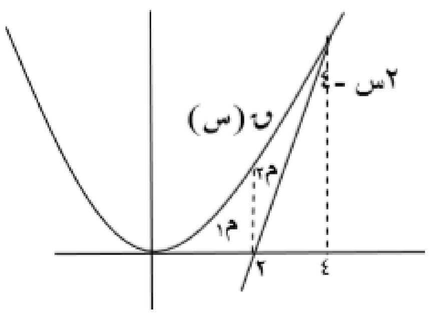
$= \int_{١}^{٣} (جا^٢ س + جتا^٢ س + هـ^س) ءس$

$= \int_{١}^{٣} (١ + هـ^س) ءس = ١(٣ - ١) + هـ^٣ - هـ^١ = ٢ + هـ^٣ - هـ$

السؤال الثاني عشر :

$ن(س) = \frac{١}{٤} س^٢$ والمماس المرسوم له عند **(٤ ، ٤)**

ومحور السينات



$ن'(س) = \frac{١}{٢} س \leftarrow$ ميل المماس **=** $ن'(٤) = ٢$

معادلة المماس هي ص-٤=٢(س-٤)

ص=٢س-٤

$م = م_{١} + م_{٢}$

$$م = \int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤} س^{٢}\,دس_{١}$$

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢^{٣} - ٠^{٣}}{٣}\right) = \frac{٢}{٣} \text{وحدة مساحة}$$

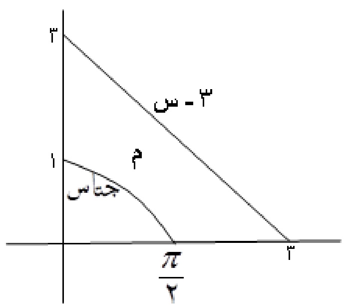
$$م = \int_{٢}^{٤} \left(ق(س) - ص\right)دس = \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{٤} س^{٢} - ٢س + ٤\right)دس_{٢}$$

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{٤^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - ٢ \times \frac{٤^{٢} - ٢^{٢}}{٢} + ٤(٤ - ٢) = \frac{٢}{٣} \text{وحدة مساحة}$$

$$م = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \text{وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث عشر:

$ق(س) = $ جتاس ، $ص = ٣ - س$ **والمحورين الاحداثيين**



$$م = \int_{٠}^{٣} (٣ - س)\,دس - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\,دس$$

$$= ٣(٣ - ٠) - \frac{٣^{٢} - ٠^{٢}}{٢} - \left(\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) - \text{جا}(٠)\right)$$

$$= ٩ - \frac{٩}{٢} - ١ = \frac{٧}{٢} \text{وحدة مساحة}$$

السؤال الرابع عشر:

أ) ف(٥) = بعد الجسم عن النقطة وعندما ن=٥ ثواني

$$ف(٥) = \int_{٠}^{٥} ع(ن)\,دن = \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\,دن + \int_{٢}^{٥} (٢٤ - ٢ن)\,دن$$

$$= ٥ \times \frac{٢^{٣} - ٠^{٣}}{٣} + ٢٤(٥ - ٢) - ٢ \times \frac{٢٥ - ٤}{٢}$$

$$= \frac{٤٠}{٣} + ٥١ = \frac{٤٠ + ١٥٣}{٣} = \frac{١٩٣}{٣} \text{ م}$$

ب) $ع(ن) = ٠$ **عندما** $٠ \le ن \le ١٢ \leftarrow ٥ن^{٢} = ٠ \leftarrow ن = ٠$

عندما $٢ < ن \le ١٢ \leftarrow ٢٤ - ٢ن = ٠ \leftarrow ن = ١٢$ **يتوقف الجسم عن الحركة عندما ن=١٢**

$$ف(١٢) = \int_{٠}^{١٢} ع(ن)\,ءن = \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\,ءن + \int_{٢}^{١٢} (٢٤ - ٢ن)\,ءن$$

$$= \frac{٤٠}{٣} + ٢٤٠ - ١٤٠ = \frac{٤٠}{٣} + ١٠٠ = \frac{٣٤٠}{٣}$$ وحدة مسافة

السؤال الخامس عشر:

$$ق'(س) = ق(س) \text{ ، } ق(س) \neq ٠$$

أ) نفرض ان $ص = ق(س) \leftarrow ءص = ق'(س)\,ءس \leftarrow ءس = \frac{ءص}{ق'(س)} \leftarrow ءس = \frac{ءص}{ص}$

$$\int (ق(س))^{ن}\,ءس = \int ص^{ن} \times \frac{ءص}{ص} = \int ص^{ن-١} \times ءص$$

$$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{١}{ن}(ق(س))^{ن} + جـ \text{ : } جـ \in ح$$

ب) $ق'(س) = ق(س) \leftarrow \frac{ق'(س)}{ق(س)} = ١$

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\,ءس = \int ١\,ءس \leftarrow لــو_{هـ}|ق(س)| = س + جـ$$

$$|ق(س)| = هـ^{س+جـ} \leftarrow ق(س) = \mp أ هـ^{س}$$

السؤال السادس عشر :

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{س+١}\,ءس = أ \text{ ما قيمة } \int_{٠}^{\pi} \frac{جتاس}{(س+٢)^{٢}}\,ءس$$

نفرض ان $ص = ٢س \leftarrow \frac{ص}{٢} = س \leftarrow \frac{ءص}{٢} = ءس$

عندما $س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = \pi$ ، $س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$$\text{أ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{٢}+١} \times \frac{\text{ءص}}{٢} \leftarrow \text{أ} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}+٢} \times \text{ءص}$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{0}^{\pi} (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{جتاس ءس}$$ **تكامل بالاجزاء**

نفرض ان $\text{ى}(\text{س}) = \text{جتاس} \leftarrow \text{ءى} = -\text{جاس ءس}$

$\text{ءهـ} = (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{ءس} \leftarrow \text{هـ} = -(\text{س}+٢)^{-١}$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{ءس} = \left.\frac{-\text{جتاس}}{(\text{س}+٢)}\right|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جاس}}{\text{س}+٢}\,\text{ءس} = \frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - \text{أ}$$

السؤال السابع عشر:

$$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

تكامل الجزء الأول بالأجزاء $\displaystyle\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

نفرض أن: $\text{ى} = \dfrac{١}{\text{س}}$

$\therefore \text{ءى} = \dfrac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ءع} = \text{ك}'(\text{س})\,\text{ءس}$

$\text{ع} = \text{ك}(\text{س})$

فيكون $$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \left.\frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}}\right|_{١}^{٣} + \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

ومنها $$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = \frac{٦}{٣} - ٢ = ٠$$

حل آخر: **نفرض ان** $\text{ى}(\text{س}) = \dfrac{\text{ك}(\text{س})}{\text{س}} \leftarrow \text{ى}'(\text{س}) = \dfrac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س}) \times ١}{\text{س}^{٢}}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{\text{س ك}'(\text{س}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{٣} \text{ى}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ى}(٣) - \text{ى}(١)$$

$ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ \leftarrow ك(٣) = ٣ك(١) = ٦$ ، $ك(١) = ٢$ $\frac{ك(٣)}{٣} - \frac{ك(١)}{١} = \frac{٦}{٣} - ٢ = ٠$

السؤال الثامن عشر :

$س ص = ٤ + س^٢$ **ومحور السينات و المستقيمين س=١ ، س=٤**

الحل : $س ص = ٤ + س^٢ \leftarrow س^٢ ص^٢ = \left(٤ + س^٢\right)^٢ \leftarrow ص^٢ = \frac{١٦ + ٨ س^٢ + س^٤}{س^٢}$

$ص^٢ = ١٦ س^{-٢} + ٨ + س^٢$

$ع = \pi \int_{١}^{٤} ص^٢ ءس = \pi \int_{١}^{٤} \left(١٦ س^{-٢} + ٨ + س^٢\right) ءس$

$= \pi \left(\frac{-١٦}{س} + ٨ س + \frac{س^٣}{٣} \Big|_{١}^{٤} \right) = \pi \left(\left(-٤ + ٣٢ + \frac{٦٤}{٣}\right) - \left(-١٦ + ٨ + \frac{١}{٣}\right) \right)$

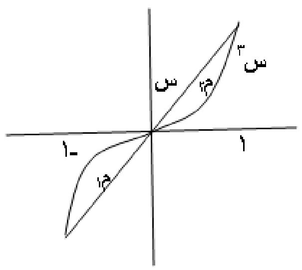
$= ٥٧ \pi$ **وحدة حجم**

السؤال التاسع عشر : $ص_١ = ظاس$ ، $ص_٢ = قاس$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $س = \frac{\pi}{٦}$

$ظاس = قاس \leftarrow جاس = ١ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \notin \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣}\right]$

$ع = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \left(قا^٢ س - ظا^٢ س\right) ءس = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ \, ءس = \pi \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٦}\right) = \frac{\pi^٢}{٦}$ **وحدة حجم**

السؤال العشرون :



$ع = ع_١ + ع_٢ = ٢ ع_١ = ٢\pi \int_{-١} \left(هـ^٢(س) - ن^٢(س)\right) ءس$

$= ٢\pi \int_{٠}^{١} \left(س^٢ - س^٦\right) ءس = ٢\pi \left(\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٧}{٧}\right)\Big|_{٠}^{١} = \frac{٨\pi}{٢١}$ **وحدة حجم**

السؤال الحادي والعشرون :

معتمدا على الشكل المجاور اوجد $\int_{-١}^{٢} \text{س ق}(\text{س}^{٢}-٣)\,\text{ءس}$ **علما بأن** $\text{م}_{١}=٤$ **،** $\text{م}_{٢}=١٢$

الحل : نفرض ان : $\text{ص}=\text{س}^{٢}-٣ \leftarrow \text{ءص}=٢\text{س}\,\text{ءس} \leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

عندما س = -١ فان ص = -٢ ، وعندما س = ٢ فان ص = ١

$$\int_{-١}^{٢} \text{س ق}(\text{س}^{٢}-٣)\,\text{ءس} = \int_{-٢}^{١} \text{س ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}\int_{-٢}^{١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\int_{-٢}^{-١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} + \int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}\right) = \frac{١}{٢}(\text{م}_{١} + -\text{م}_{٢}) = \frac{١}{٢}(٤-١٢) = -٤$$

حلول الوحدة السادسة(الأعداد المركبة)
تمارين ومسائل (٦-١) صفحة ٢٠٩

السؤال الأول: $٢+\sqrt{-٢} = ٢+\sqrt{٢}\,\text{ت}$

١) $\sqrt{-٣٢}+\sqrt{-٢} = \sqrt{٣٢}\times\sqrt{-١}+\sqrt{٢}\times\sqrt{-١}$
$= ٤\sqrt{٢}\,\text{ت}+\sqrt{٢}\,\text{ت} = ٥\sqrt{٢}\,\text{ت} = ٠+٥\sqrt{٢}\,\text{ت}$

٢) $\sqrt{-٨}\times\sqrt{-٢} = \sqrt{٨}\times\sqrt{-١}\times\sqrt{٢}\times\sqrt{-١}$
$= ٢\sqrt{٢}\,\text{ت}\times\sqrt{٢}\,\text{ت} = ٤\text{ت}^{٢} = ٤\times-١ = -٤ = -٤+٠\text{ت}$

السؤال الثاني:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{٢}{٥}\text{ت} - ٣ = -٣+\frac{٢}{٥}\text{ت}$	٣ -	$\frac{٢}{٥}$
$\sqrt{-٩} = \sqrt{٩}\,\text{ت} = ٠+٣\text{ت}$	٠	٣
$١-\sqrt{-١} = ١-\text{ت}$	١	١-
$\sqrt{٩\times-٤} = \sqrt{٣٦}\,\text{ت} = ٠+٦\text{ت}$	٠	٦
-٢ت= ٠ – ٢ ت	٠	٢-
$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}+٠\text{ت}$	$\frac{١}{٣}$	٠

السؤال الثالث: البرهان : الطرف الأيمن :

$$= \left(1+\text{ت}+\text{ت}^{2}\right)^{3}\left(1-\text{ت}+\text{ت}^{2}\right)^{3}$$

$$= (1+\text{ت}-1)^{3}\,(1-\text{ت}-1)^{3}$$

$$= (\text{ت})^{3}\,(-\text{ت})^{3}$$

$$= -\text{ت}^{6} = -(\text{ت}^{2})^{3} = 1$$

= الطرف الأيسر

السؤال الرابع:

1) $\text{ت}^{43} = \text{ت}^{40} \times \text{ت}^{3} = (\text{ت}^{2})^{20} \times -\text{ت} = 1 \times -\text{ت} = -\text{ت}$

2) $\dfrac{1}{\text{ت}^{65}} = \text{ت}^{-65} = \text{ت}^{-68} \times \text{ت}^{3} = (\text{ت}^{2})^{-34} \times -\text{ت}$

$= 1 \times -\text{ت} = -\text{ت}$

3) $\text{ت}^{27} + \dfrac{1}{\text{ت}^{27}} = \text{ت}^{27} + \text{ت}^{-27} = \text{ت}^{24} \times \text{ت}^{3} + \text{ت}^{-28} \times \text{ت}$

$= (\text{ت}^{2})^{12} \times -\text{ت} + (\text{ت}^{2})^{-14} \times \text{ت} = -\text{ت} + \text{ت} = 0 = 0 + 0\text{ت} = 0$

السؤال الخامس:

البرهان : الطرف الأيمن=

$$\frac{1+2\text{ت}^{2}+\text{ت}^{3}+2\text{ت}}{\text{ت}^{3}+\text{ت}^{4}} = \frac{1+2\times-1+-\text{ت}+2\text{ت}}{\text{ت}^{3}(1+\text{ت})}$$

$$= \frac{-1+\text{ت}}{-\text{ت}-\text{ت}^{2}} = \frac{-1(1-\text{ت})}{1-\text{ت}} = -1$$

= الطرف الأيسر

تمارين ومسائل (٦-٢) صفحة ٢١٤

السؤال الأول:

أ) ٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ − ٢ت)
= ٨ + ١٦ت + ١٥ − ١٠ت = ٢٣ + ٦ت

(٣ + ٤ت)(٣ − ٥ت)
= ٩ − ١٥ت + ١٢ت − ٢٠ت^{٢}
= ٩ − ٣ت − ٢٠ × −١ = ٢٩ − ٣ت

ج) (٣ + ٤ت)^{٣} = (٣ + ٤ت)^{٢}(٣ + ٤ت)
= (٩ + ٢٤ت + ١٦ت^{٢})(٣ + ٤ت)
= (٩ − ١٦ + ٢٤ت)(٣ + ٤ت)
= (−٧ + ٢٤ت)(٣ + ٤ت)
= −٢١ − ٢٨ت + ٧٢ت + ٩٦ت^{٢}
= −٢١ − ٩٦ + ٤٤ت = −١١٧ + ٤٤ت

د) ٤ت(١ − ٥ت)^{٢} = ٤ت(١ − ١٠ت + ٢٥ت^{٢})
= ٤ت(١ − ٢٥ − ١٠ت) = ٤ت(−٢٤ − ١٠ت)
= −٩٦ت − ٤٠ت^{٢} = ٤٠ − ٩٦ت

و) (١ − ت)^{٦} = ((١ − ت)^{٢})^{٣} = (١ − ٢ت + ت^{٢})^{٣}
= (١ − ٢ت − ١)^{٣} = (−٢ت)^{٣} = −٨ت^{٣}
= −٨ × −ت = ٨ت = ٨ت

السؤال الثاني:

س + ٢ست = −٥(س − ٤ت)
بوضع س = أ + بت
⇐ أ + بت + ٢ت(أ + بت) = −٥(أ + بت − ٤ت)
أ + بت + ٢أت − ٢ب = أ − ٢ب + (٢أ + ب)ت =
= −٥أ + (−٥ب + ٢٠)ت

⇐ أ − ٢ب = −٥أ
∴ ٦أ = ٢ب ⇐ ب = ٣أ

⇐ ب + ٢أ = −٥ب + ٢٠
∴ ٦ب + ٢أ = ٢٠ ⇐ أ + ٣ب = ١٠
∴ أ + ٣ × ٣أ = ١٠ ⇐ ١٠أ = ١٠
⇐ أ = ١، ب = ٣ ∴ س = ١ + ٣ت

السؤال الثالث:

س − ص − ٢ = ص^{٢} ت − ست
∴ س + ست = ص + ٢ + ص^{٢} ت

$\therefore$ س $=$ ص $+ ٢ \Leftarrow$ س $-$ ص $= ٢$

، س $=$ ص$^{٢} \Leftarrow$ ص $+ ٢ =$ ص^{٢}

$\Leftarrow$ ص$^{٢} -$ ص $- ٢ = ٠$

$($ص$ - ٢)($ص$ + ١) = ٠$

$\therefore$ ص $= ٢ \Leftarrow$ س $= ٤$

، ص $= -١ \Leftarrow$ س $= ١$

السؤال الرابع:

الطرف الأيمن$=$ ع$^{٥} +$ ع^{٢}

$=$ ت$^{٥} +$ ت$^{٢} =$ ت$+ -١$

الطرف الأيسر $=$ ع$-١ =$ ت$+ -١$

السؤال الخامس:

الطرف الأيمن$=$ ع$^{٢} + ٢$ع$ + ٢$

$= (-١ +$ ت$)^{٢} + ٢(-١ +$ ت$) + ٢$

$= ١ +$ ت$^{٢} - ٢$ت$ - ٢ + ٢$ت$ + ٢$

$= ١ - ١ - ٢$ت$ - ٢ + ٢$ت$ + ٢ = ٠$

$=$ **الطرف الأيسر**

السؤال السادس:

$$\frac{\text{ت}}{\text{ت} + ٣} = \frac{١ + ٣\text{ت}}{\text{أ}}$$

$\Leftarrow$ أت $= ($ت$ + ٣)(١ + ٣$ت$)$

أت $=$ ت $+ ٣$ت$^{٢} + ٣ + ٩$ت

أت $= ١٠$ت$ - ٣ + ٣$

$\Leftarrow$ أت $= ١٠$ت $\Leftarrow$ أ $= ١٠$

السؤال السابع:

١) $(٢ + \sqrt{١٢}$ت$)^{-١} =$ س $+$ صت

$\Leftarrow (٢ + \sqrt{١٢}$ت$)($س $+$ صت$) = ١$

$(٢$س $+ ٢$صت $+ \sqrt{١٢}$ست $+ \sqrt{١٢}$صت$^{٢}) = ١ + ٠$ت

٢س $- \sqrt{١٢}$ص $+ (٢$ص $+ \sqrt{١٢}$س$)$ت $= ١ + ٠$ت

$\therefore ٢$ص $+ \sqrt{١٢}$س $= ٠ \Leftarrow$ ص $= -\sqrt{٣}$س

٢س $- \sqrt{١٢}$ص $= ١ \Leftarrow ٢$س $- ٢\sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}$س $= ١$

$\therefore ٢$س $+ ٦$س $= ١ \Leftarrow ٨$س $= ١ \Leftarrow$ س $= \frac{١}{٨}$ ص $= -\sqrt{٣} \times \frac{١}{٨} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

$$\therefore \left(٢+\sqrt{١٢}\,\text{ت}\right)^{-١}=\frac{١}{٨}-\frac{\sqrt{٣}}{٨}\text{ت}$$

يمكن استخدام قاعدة النظير الضربي مباشرة

٢) $$\left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)^{-١}=\text{س}+\text{ص}\text{ت}$$

$$\Leftarrow \left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)(\text{س}+\text{ص}\text{ت})=١$$

$$\text{ت}(\text{س}+\text{ص}\text{ت})=\text{ت}-٣$$

$$\text{ت}\text{س}+\text{ص}\text{ت}^{٢}=\text{ت}-٣$$

$$\therefore \text{ت}\text{س}-\text{ص}=\text{ت}-٣$$

$$\therefore \text{س}=١،\ \text{ص}=٣$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ت}}{\text{ت}-٣}\right)^{-١}=١+٣\text{ت}$$

٣) $$\left((١+\text{ت})^{١٣}\right)^{-١}=(١+\text{ت})^{-١٣}$$

$$=(١+\text{ت})^{-١٤}\times(١+\text{ت})$$

$$=\left((١+\text{ت})^{٢}\right)^{-٧}\times(١+\text{ت})$$

$$=\left(١+٢\text{ت}+\text{ت}^{٢}\right)^{-٧}\times(١+\text{ت})$$

$$=(٢\text{ت})^{-٧}\times(١+\text{ت})$$

$$=\frac{١}{١٢٨}\times\text{ت}^{-٨}\times\text{ت}\times(١+\text{ت})$$

$$=\frac{\text{ت}}{١٢٨}\times(١+\text{ت})=\frac{-١}{١٢٨}+\frac{١}{١٢٨}\text{ت}$$

السؤال الثامن:

بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ع_{١}=\left(-\sqrt{٨}+\sqrt{٥٠}\right)\text{ت}=\left(-٢\sqrt{٢}+٥\sqrt{٢}\right)\text{ت}=٣\sqrt{٢}\,\text{ت}$$

$$\Leftarrow ع_{١}=\sqrt{٢}\,\text{ت}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$\sqrt{٢}\,\text{ت}+٣ع_{٢}=-\sqrt{٨}\,\text{ت}\Leftarrow ٣ع_{٢}=-\sqrt{٨}\,\text{ت}-\sqrt{٢}\,\text{ت}$$

$$\Leftarrow ٣ع_{٢}=-٢\sqrt{٢}\,\text{ت}-\sqrt{٢}\,\text{ت}=-٣\sqrt{٢}\,\text{ت}$$

$$\Leftarrow ع_{٢}=-\sqrt{٢}\,\text{ت}$$

تمارين ومسائل (٦-٣) صفحة ٢٢٠

السؤال الأول:

$١ + \sqrt{-٤} = ١ + ٢ت$

$\therefore |١ + \sqrt{-٤}| = |١ + ٢ت|$

$= \sqrt{١^٢ + ٢^٢} = \sqrt{١ + ٤}$

$= \sqrt{٥}$

السؤال الثاني:

أ) $|-٣ع_١| = |-٣ - ٣ت| = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢} × ٢\right| = |١| = ١$

حل آخر:

$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}\left((١)^٢ + (١)^٢\right)\right|$

$= \sqrt{\frac{١}{٢} × ٢} = \sqrt{١} = ١$

ج) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١ - ت}{١ + ت} × \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت^٢ - ٢ت}{١ + ١}$

$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$

$\therefore \left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right| = |-ت| = \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١} = ١$

د) $ع_١ ع_٢ = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$|٢ع_١ع_٢| = |٢ × ٢| = |٤| = \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

حل آخر:

$|٢ع_١ع_٢| = \left|٢\left((١)^٢ + (١)^٢\right)\right| = |٢ × ٢|$

$= |٤| = \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

السؤال الثالث: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

اولا: $ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت} = \frac{٥}{٣ - ٤ت} × \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت}$

$$= \frac{١٥+٢٠ت}{٩+١٦} = \frac{١٥}{٢٥}+\frac{٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥}+\frac{٤}{٥}ت$$

ثانيا: $(٣ع)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥}-\frac{١٢}{٥}ت\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥}-\frac{١٢}{٥}ت}$

$$= \frac{٥}{٩-١٢ت} \times \frac{٩+١٢ت}{٩+١٢ت} = \frac{٤٥+٦٠ت}{٨١+١٤٤}$$

$$= \frac{٤٥}{٢٢٥}+\frac{٦٠}{٢٢٥}ت = \frac{٣}{١٥}+\frac{٤}{١٥}ت = \frac{١}{٣}ع^{-١}$$

ثالثا: $|ع^{-١}| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}+\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{٩+١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

رابعا : $\left|\frac{ع}{٥}\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥}-\frac{٤}{٥}ت\right)\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥}+\frac{٤}{٥}ت\right)\right|$

$$= \left|\frac{٣}{٢٥}+\frac{٤}{٢٥}ت\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^{٢}+\left(\frac{٤}{٢٥}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥}+\frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$$

السؤال الرابع:

أ) $\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت} = \frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت} \times \frac{٢-ت}{٢-ت}$

$$= \frac{-٢+ت+٢\sqrt{٢}ت-\sqrt{٢}ت^{٢}}{٤+١}$$

$$= \frac{-٢+\sqrt{٢}}{٥}+\frac{١+٢\sqrt{٢}}{٥}ت$$

ب) $\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت} = \frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}\times\frac{٣+٥ت}{٣+٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}\times\frac{٢+٣ت}{٢+٣ت}$

$$= \frac{٩+٢٧ت+٢٠ت^{٢}}{٩+٢٥}+\frac{٤+١٢ت+٩ت^{٢}}{٩+٤}$$

$$= \frac{-١١+٢٧ت}{٣٤}+\frac{-٥+١٢ت}{١٣}$$

$$= \frac{-١٤٣+٣٥١ت-١٧٠+٤٠٨ت}{٤٤٢}$$

$$= \frac{-٣١٣}{٤٤٢}+\frac{+٧٥٩}{٤٤٢}ت$$

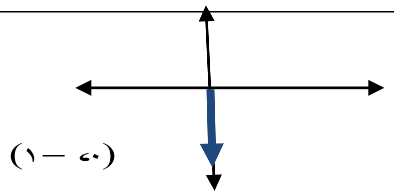
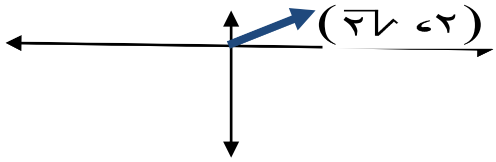
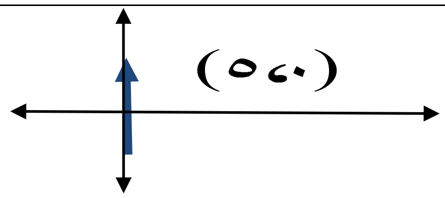
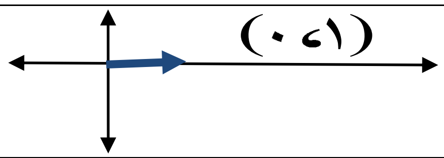
السؤال الخامس: نفرض أن: $ع = أ + ب ت$

الطرف الأيمن= $ع-١ = أ+ب ت-١ \Rightarrow |ع-١| = \sqrt{(أ-١)^{٢}+ب^{٢}}$

الطرف الأيسر= $\bar{ع}-١=أ-ب ت-١ \Leftarrow \left|\bar{ع}-١\right| = \sqrt{(أ-١)^{٢}+(-ب)^{٢}} = \sqrt{(أ-١)^{٢}+ب^{٢}}$

أي ان $|ع-١| = \left|\bar{ع}-١\right|$

السؤال السادس

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٣٥} = ت^{٣٢}\times ت^{٣} = ١\times -ت = -ت$ $= ٠-ت = (٠، -١)$	
$٢+\sqrt{-٢} = ٢+\sqrt{٢}ت = (٢، \sqrt{٢})$	
$\sqrt{-٤}+\sqrt{-٩} = \sqrt{٤}\times\sqrt{-١}+\sqrt{٩}\times\sqrt{-١}$ $= ٢ت+٣ت = ٥ت = ٠+٥ت = (٠، ٥)$	
$\frac{١}{ت^{٥٢}} = ت^{-٥٢} = (ت^{٢})^{-٢٦} = ١$	

السؤال السابع:

$\because ع^{٢} = (\bar{ع})^{٢} \Leftarrow (أ+ب ت)^{٢} = (أ-ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow أ^{٢}-ب^{٢}+٢أب ت = أ^{٢}-ب^{٢}-٢أب ت$

$\therefore ٢أب = -٢أب \Leftarrow ٤أب = ٠$

$\therefore أ = ٠ \quad \therefore ع = ب ت$ **(عدد تخيلي)**

أو $ب = ٠ \quad \therefore ع = أ$ **(عدد حقيقي)**

السؤال الثامن:

أ) ع=−١+ت

$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢}+(١)^{٢}} = \sqrt{٢}$

$جتاه = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $جاه = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ،

$\therefore$ هـ $= \frac{3\pi}{4}$ **ومنها** ع $= \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{3\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{3\pi}{4}\right)$

ب) ع $= \frac{-1}{2} + 0$ت

$|\text{ع}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ظاهـ $= \frac{0}{\frac{-1}{2}} = 0$ $\quad \therefore$ هـ $= \pi$

$\therefore$ ع $= \frac{1}{2}\left(\text{جتا}\pi + \text{ت جا}\pi\right)$

ع $= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ت ، $|\text{ع}| = 1$

ج) جتاهـ $= -\frac{1}{2}$ ،جاهـ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow$ هـ $= \frac{2}{3}\pi$

ع $= \left(\text{جتا}\frac{2}{3}\pi + \text{ت جا}\frac{2}{3}\pi\right)$

السؤال التاسع:

ا) ع $= 7\left(\text{جتا}\frac{3\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{3\pi}{4}\right) = 7\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{ت}\right)$

$= \frac{-7}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}}$ت

ب) ع $= 3\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{6} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{6}\right) = 3\text{جتا}\frac{\pi}{6} - 3\text{ت جا}\frac{\pi}{6}$

$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{2}\text{ت} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$ت

ج)

ع $= 2\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} - \text{ت جا}\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{ت}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\text{ت} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ت

د) ع $= 3\left(\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{ت جا}\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}\right)$

$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ت

تمارين عامة/ الأعداد المركبة صفحة ٢٢١

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	ج	ج	د	أ	ب	ب	د

السؤال الثاني:

أ) $|ع_١| = |١+٢ت| = \sqrt{(١)^٢+(٢)^٢} = \sqrt{٥}$

ب) $|ع_٢| = |٢-ت| = \sqrt{(٢)^٢+(-١)^٢} = \sqrt{٥}$

ج) $|ع_١+ع_٢| = |٣+ت| = \sqrt{(٣)^٢+(١)^٢} = \sqrt{١٠}$

د) $|ع_١|+|ع_٢| = \sqrt{٥}+\sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٢٠}$

نلاحظ أن: $|ع_١+ع_٢| \neq |ع_١|+|ع_٢|$

السؤال الثالث:

$\because س^٢ + س + (ص-١)ت = -ت س^٢$

$\therefore س^٢ + س + \left(ص + س^٢ - ١\right)ت = ٠$

ومنها $س^٢ + س = ٠$ ، $ص + س^٢ - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١ - س^٢$

$\Leftarrow س(س+١) = ٠$

إذن إما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

أو $س = -١ \Leftarrow ص = ٠$

الحلول هي $(٠،١)$، $(-١،٠)$

السؤال الرابع:

أ) $ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت}$ ، $م = \frac{١١ت-٣}{١+٢ت}$

$ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{٣-ت}{٣-ت}$

$= \frac{٥(٩-٦ت-١)}{٩+١} = \frac{٨-٦ت}{٢} = ٤-٣ت$

$م = \frac{١١ت-٢}{١+٢ت} = \frac{١١ت-٢}{١+٢ت} \times \frac{١-٢ت}{١-٢ت}$

$= \frac{١١ت+٢٢-٢+٤ت}{١+٤} = \frac{٢٠+١٥ت}{٥} = ٤+٣ت = \bar{ل}$

إذن ل ، م مترافقان

ب) $ل + م = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} + \frac{١١ت-٣}{١+٢ت} = ٤-٣ت+٤+٣ت = ٨$

$ل م = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{١١ت-٣}{١+٢ت} = (٤-٣ت)(٤+٣ت) = ١٦+٩ = ٢٥$

$$\Leftarrow \text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} = (\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\text{لم} = ٨^{٢} - ٢ \times ٢٥ = ١٤$$

السؤال الخامس:

$$\frac{\sqrt{٣} - \text{ت}}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}} = \frac{\sqrt{٣} - \text{ت}}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}} \times \frac{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}} = \frac{\sqrt{٣} - ٤\text{ت} - \sqrt{٣}}{١ + ٣} = \frac{-٤\text{ت}}{٤} = -\text{ت}$$

$$\Leftarrow \left(\frac{\sqrt{٣} - \text{ت}}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}\right)^{٧} = (-\text{ت})^{٧} = -١ \times \text{ت}^{٤} \times \text{ت}^{٣} = -١ \times ١ \times -\text{ت} = \text{ت}$$

انتهت الاجابات

المكتبة الفلسطينية

الشاملة للمعلم والطالب

تحضير دروس - اختبارات - أوراق عمل

لتحميل المزيد من موقع المكتبة الفلسطينية الشاملة

http://www.sh-pal.com

تابعنا على صفحة الفيس بوك: www.facebook.com/shamela.pal

تابعنا على قنوات التلجرام: www.sh-pal.com/p/blog-page_42.html

أقسام موقع المكتبة الفلسطينية الشاملة:

الصف الأول: www.sh-pal.com/p/blog-page_24.html

الصف الثاني: www.sh-pal.com/p/blog-page_46.html

الصف الثالث: www.sh-pal.com/p/blog-page_98.html

الصف الرابع: www.sh-pal.com/p/blog-page_72.html

الصف الخامس: www.sh-pal.com/p/blog-page_80.html

الصف السادس: www.sh-pal.com/p/blog-page_13.html

الصف السابع: www.sh-pal.com/p/blog-page_66.html

الصف الثامن: www.sh-pal.com/p/blog-page_35.html

الصف التاسع: www.sh-pal.com/p/blog-page_78.html

الصف العاشر: www.sh-pal.com/p/blog-page_11.html

الصف الحادي عشر: www.sh-pal.com/p/blog-page_37.html

الصف الثاني عشر: www.sh-pal.com/p/blog-page_33.html

ملازم للمتقدمين للوظائف: www.sh-pal.com/p/blog-page_89.html

شارك معنا: www.sh-pal.com/p/blog-page_40.html

اتصل بنا: www.sh-pal.com/p/blog-page_9.html